# 2. Przykładowe scenariusze lekcji

## Scenariusz nr 1

### Zakres podstawowy i rozszerzony

Temat lekcji: „Funkcja kwadratowa – wykres i własności”.

Celem lekcji jest zapoznanie uczniów z wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i określenie znaczenia współczynników $a$, $b$, $c$.

Czas trwania lekcji – jedna jednostka lekcyjna (45 minut).

Forma pracy – praca (w grupach) przy komputerach.

Materiały pomocnicze, środki dydaktyczne – komputery, program (wraz z opisem dostępny na stronie internetowej www.pazdro.com.pl), zestawy zadań dla każdego ucznia (załączniki nr 1 i nr 2)

Zamierzona struktura lekcji

| Kolejne etapy | Proponowany przebieg lekcji | Czas | Umiejętności kształtowane na lekcji |
|---|---|---|---|
| I faza Zaangażowanie | Nauczyciel:<br>– podaje temat lekcji;<br>– czuwa nad tym, by każdy miał odpowiednie warunki do pracy z komputerem;<br>– omawia metodę pracy i sposób korzystania z programu;<br>– rozdaje kartki z zadaniami (załącznik nr 1);<br>– poleca, aby uczniowie przeprowadzili obserwację wykresów odpowiednich funkcji stosując program komputerowy;<br>– sugeruje, by uczniowie wyciągnęli wnioski dotyczące roli współczynników $a$, $b$, $c$. | 5 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| II faza<br>Badanie | Uczniowie:<br>– zapoznają się z działaniem programu;<br>– w zeszytach zapisują temat lekcji i treść zadania;<br>– wpisują otrzymane wzory i obserwują na ekranie wykresy odpowiednich funkcji;<br>– dyskutują, próbując znaleźć odpowiedzi na postawione pytania.<br>Nauczyciel:<br>– słuchacz i obserwator. | 15 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>komunikacja uczeń-uczeń;<br>analizowanie;<br>wnioskowanie; |
| III faza<br>Przekształcanie | Nauczyciel:<br>rozdaje zadanie dotyczące własności jednomianu kwadratowego (załącznik nr 2);<br>Uczniowie:<br>– rozwiązują zadania, przygotowują się do prezentacji. | 10 minut | komunikacja uczeń-uczeń;<br>analizowanie,<br>wnioskowanie; |
| IV faza<br>Prezentacja | Wybrani uczniowie:<br>– prezentują rozwiązanie przy tablicy.<br>Nauczyciel:<br>– obserwuje sposób prezentacji; w razie potrzeby komentuje efekty pracy uczniów. | 10 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>analizowanie;<br>autoprezentacja;<br>argumentowanie;<br>wnioskowanie; |
| V faza<br>Refleksja | Uczniowie:<br>– uświadamiają sobie, czego się nauczyli;<br>– wyciągają wnioski do dalszej pracy;<br>– oceniają przebieg lekcji i osiągnięte rezultaty.<br>Nauczyciel:<br>– wyraża własną opinię na temat przebiegu lekcji i zaangażowania uczniów, słucha uwag uczniowskich;<br>– rozmawia z uczniami na temat przydatności komputera na lekcji matematyki;<br>– zadaje pracę domową. | 5 minut | porządkowanie informacji;<br>pogłębienie procesu uczenia się;<br>wnioskowanie. |

**Załącznik nr 1**

Narysuj, używając programu, w jednym układzie współrzędnych wykresy czterech następujących funkcji:

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 4x^2$, $y = 0,5x^2$;
b) $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -4x^2$, $y = -0,5x^2$;
c) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 3$, $y = 2x^2 - 4$ ;
d) $y = 2x^2 + 4x$, $y = 2x^2 + 4x + 1$, $y = 2x^2 + 4x - 3$, $y = 2x^2 + 4x + 2$;
e) $y = 2x^2 + 4x$, $y = 2x^2 + 6x$, $y = 2x^2 - 4x$, $y = 2x^2 - x$.

Po zapoznaniu się z wykresami odpowiedz na pytania:

1. W jaki sposób wpływa na zmianę wykresu współczynnik przy $x^2$? Jakie znaczenie ma znak tego współczynnika? Jak zmienia się wykres, jeśli zmniejszymy lub zwiększymy ten współczynnik? (punkty a i b)
2. Jaką rolę odgrywa wyraz wolny? Jak zmienia się wykres, jeśli nie zmieniamy współczynników przy $x^2$ i przy $x$, a zmieniamy wyraz wolny? (punkty c i d)
3. W jaki sposób wpływa na zmianę wykresu współczynnik przy $x$? (punkt e)

**Załącznik nr 2.**

Uzupełnij tabelkę:

**Własności funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$**

| Własności funkcji | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| 1. Dziedzina | | |
| 2. Zbiór wartości | | |
| 3. Miejsce zerowe | | |
| 4. Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie | | |
| 5. Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne | | |
| 6. Parzystość funkcji | | |
| 7. Nieparzystość funkcji | | |
| 8. Różnowartościowość | | |
| 9. Monotoniczność | | |
| 10. Ograniczoność | | |
| 11. Wartość najmniejsza | | |
| 12. Wartość największa | | |

### Uwagi i spostrzeżenia

**I.** Rozwiązanie zadań.

Zadanie z załącznika nr 1
Uczniowie powinni wyciągnąć następujące wnioski:

Ad 1.
Wykresem jednomianu kwadratowego $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ jest parabola o ramionach skierowanych ku górze, jeśli $a > 0$, ku dołowi, jeśli $a < 0$.
Im większa jest wartość bezwzględna współczynnika $a$, tym bliżej osi $OY$ znajdują się ramiona paraboli.

Ad 2.
Wykres funkcji $y = f(x) + c$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[0, c]$. Zatem współczynnik $c$ wpływa na przesunięcie odpowiedniej paraboli w kierunku równoległym do osi $OY$.

Ad 3.
Zmiana współczynnika przy $x$ powoduje przesunięcie wykresu odpowiedniej funkcji (współczynnik ten wpływa na obie współrzędne wektora przesunięcia).

Uwaga. Wystarczy, aby uczniowie wyciągnęli powyższy ogólny wniosek. Na ten wniosek można się powołać we wprowadzeniu do jednej z kolejnych lekcji (postać kanoniczna trójmianu kwadratowego). Wtedy też należy sprecyzować współrzędne wektora przesunięcia.

Zadanie z załącznika nr 2
**Własności funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$**

| Własności funkcji | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| 1. Dziedzina | $\boldsymbol{R}$ | |
| 2. Zbiór wartości | $\langle 0, +\infty)$ | $(-\infty, 0\rangle$ |
| 3. Miejsce zerowe | $x = 0$ | |
| 4. Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie | $\boldsymbol{R} - \{0\}$ | $\varnothing$ |
| 5. Zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne | $\varnothing$ | $\boldsymbol{R} - \{0\}$ |
| 6. Parzystość funkcji | Funkcja jest parzysta | |
| 7. Nieparzystość funkcji | Funkcja nie jest nieparzysta | |
| 8. Różnowartościowość | Funkcja nie jest różnowartościowa | |

| | | |
|---|---|---|
| 9. Monotoniczność | Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ | Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$, |
| 10. Ograniczoność | Jest ograniczona z dołu, nie jest ograniczona z góry | Jest ograniczona z góry, nie jest ograniczona z dołu |
| 11. Wartość najmniejsza | $f(0) = 0$ | Nie istnieje |
| 12. Wartość największa | Nie istnieje | $f(0) = 0$ |

**II.** Spostrzeżenia

Komputer w czasie lekcji znacznie przyspiesza tempo prowadzenia lekcji. Zadanie wstępne polega na narysowaniu w sumie 20 wykresów, narysowanie ich na tablicy zajęłoby nawet najzdolniejszym uczniom wiele czasu. Komputer daje możliwość obserwacji kilku wykresów jednocześnie, pozwala też na szybką zmianę współczynników oraz wykonanie wielu podobnych ćwiczeń, które nauczyciel może sam przygotować. Podany program może być wykorzystany przy innych tematach związanych z funkcją kwadratową.

Lekcja składa się w zasadzie z dwóch części: I – obserwacja wykresów na ekranie monitora, II – opis własności funkcji (już bez komputera). Na poziomie rozszerzonym można rozbudować II część lekcji, np. przeprowadzając dowody wybranych własności (monotoniczność, parzystość) – można skorzystać z podręcznika str. 36.

W ramach pracy domowej warto też polecić uczniom opis własności funkcji z załącznika 1. punkt c).

## Scenariusz nr 2

### Zakres podstawowy i rozszerzony

<u>Temat lekcji</u>: „Wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym".

<u>Celem lekcji</u> jest zapoznanie uczniów z metodą znajdowania wartości największej i wartości najmniejszej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

<u>Czas trwania lekcji</u> – jedna jednostka lekcyjna (45 minut).

Forma pracy – praca (w grupach) przy komputerach

<u>Materiały pomocnicze, środki dydaktyczne</u> – komputery, program (wraz z opisem dostępny na stronie internetowej www.pazdro.com.pl), zadania na kartkach dla każdego ucznia (załącznik nr 1)

Zamierzona struktura lekcji

| Kolejne etapy | Przebieg lekcji | Czas | Umiejętności kształtowane na lekcji |
|---|---|---|---|
| I faza Zaangażowanie | Nauczyciel:<br>– zapisuje temat na tablicy;<br>– dzieli uczniów na grupy przy komputerach, czuwa nad tym, by każdy miał odpowiednie warunki do pracy;<br>– omawia metodę pracy i sposób korzystania z programu;<br>– rozdaje kartki z zadaniami (załącznik nr 1);<br>– poleca, aby uczniowie wpisali podane wzory funkcji oraz przedziały argumentów i odczytali z ekranu wartość najmniejszą i wartość największą każdej z funkcji;<br>– sugeruje, by uczniowie wyciągnęli wnioski dotyczące ogólnej metody wyznaczania wartości najmniejszej i wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. | 5 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel; |
| II faza Badanie | Uczniowie:<br>– zapoznają się z działaniem programu;<br>– w zeszytach zapisują temat lekcji i treść zadania;<br>– wpisują otrzymane wzory i obserwują na ekranie wykresy odpowiednich funkcji (zadanie 1.);<br>– odczytują wartość najmniejszą i największą każdej z funkcji.<br>Nauczyciel:<br>– słuchacz i obserwator. | 10 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>komunikacja uczeń-uczeń;<br>analizowanie;<br>wnioskowanie; |
| III faza Przekształcanie | Uczniowie:<br>– dokonują podsumowania pracy przy komputerze<br>– formułują wnioski<br>– rozwiązują zadania 2. i 3.<br>Nauczyciel<br>– zapisuje i ewentualnie koryguje sformułowane przez uczniów wnioski. | 15 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>analizowanie;<br>wnioskowanie; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV faza Prezentacja | Uczniowie wybrani przez nauczyciela lub ci, którzy samodzielnie zgłosili się do odpowiedzi prezentują wyniki pracy. Pozostali uczniowie analizują i porównują własne rozwiązania z przedstawionymi na tablicy. | 10 minut | autoprezentacja<br>komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>analizowanie; |
| V faza Refleksja | Uczniowie:<br>– oceniają przebieg lekcji od strony osiągniętych celów i atrakcyjności zajęć;<br>– wyciągają wnioski do dalszej pracy.<br>Nauczyciel:<br>– podsumowuje pracę uczniów;<br>– zadaje pracę domową. | 5 minut | pogłębienie świadomości procesu uczenia się. |

**Załącznik nr 1**

Zadanie 1.

Narysuj, korzystając z programu, wykresy odpowiednich funkcji i wyznacz najmniejszą i największą wartość każdej z nich. Odczytaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle -3, 0\rangle$;

b) $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle 1, 2\rangle$;

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$;

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

Zadanie 2.

Bez rysowania wykresu wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji. Odczytaj argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$;

b) $f(x) = -2x^2 + 8\sqrt{2}x + 3$ w przedziale $\langle -1, 3\rangle$.

Zadanie 3.

Liczbę osób zwiedzających wystawę $n$-tego dnia od momentu jej otwarcia w przybliżeniu podaje wzór $W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
Odpowiedz na pytania:

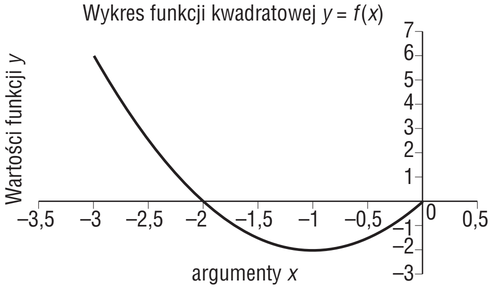
a) W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób i ile ich było?

b) Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania?

## Uwagi i spostrzeżenia

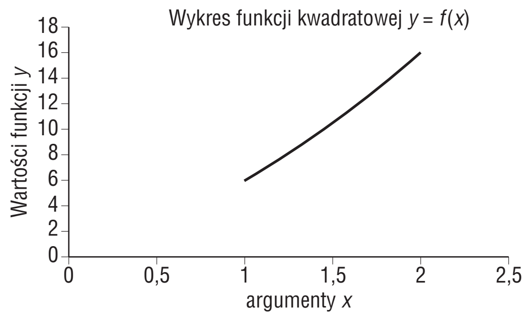
**I.** Rozwiązanie zadań i wydruk wykresów.

Zadanie 1.
Ad a) $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle -3, 0\rangle$;



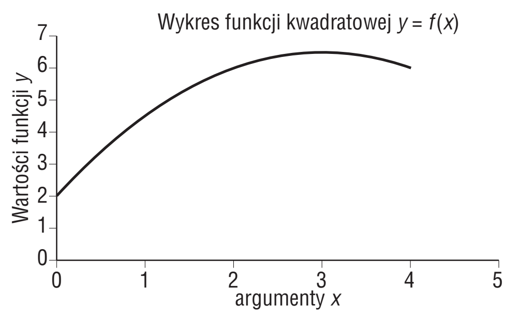

Uczniowie odczytują: największa wartość funkcji to $f(-3) = 6$, najmniejsza $f(-1) = -2$.

Ad b) $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle 1, 2\rangle$;



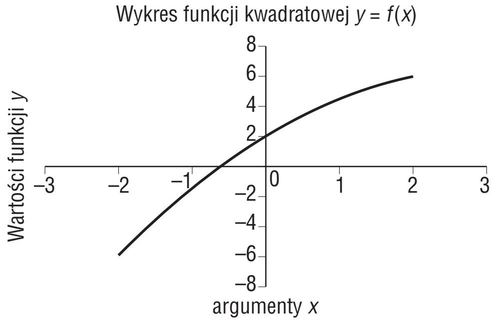

Uczniowie odczytują: najmniejsza wartość funkcji to $f(1) = 6$, największa $f(2) = 16$.

Ad c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$;




Uczniowie odczytują: największa wartość funkcji to $f(3) = 6$, najmniejsza $f(0) = 2$.

Ad d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.




Uczniowie odczytują: największa wartość funkcji to $f(2) = 6$, najmniejsza $f(-2) = -6$.

Wniosek.

Aby znaleźć najmniejszą (największą) wartość funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ na przedziale domkniętym $\langle m, n\rangle$ wystarczy obliczyć następujące wielkości: $x_w$, $y_w$ (współrzędne wierzchołka paraboli), $f(m)$, $f(n)$. Jeśli $x_w \in \langle m, n\rangle$, wówczas dla $a > 0$ funkcja przyjmuje najmniejszą wartość równą $y_w$, największą zaś – równą większej z liczb $f(m)$, $f(n)$. Dla $a < 0$ funkcja przyjmuje największą wartość, równą $y_w$, najmniejszą zaś równą mniejszej z liczb $f(m)$, $f(n)$. Jeśli $x_w \notin \langle m, n\rangle$, to najmniejszą i największą wartość wyznaczają wartości na krańcach przedziału $\langle m, n\rangle$.

Zadanie 2.

Ad a) $x_w = 1$; $f(0) = 4$; $f(2) = 4$; $a > 0$.

Zauważmy, że $x_w \in \langle 0, 2\rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji jest $f(1) = y_w = 3$, największą $f(0) = f(2) = 4$.

Ad b) $x_w = 4\sqrt{2}$; $f(-1) = 1 - 8\sqrt{2}$; $f(3) = 24\sqrt{2} - 15$; $a < 0$.

Zauważmy, że $x_w \notin \langle -1, 3\rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji jest $f(-1) = 1 - 8\sqrt{2}$; największą $f(3) = 24\sqrt{2} - 15$.

Zadanie 3.

$W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, $D_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Ad a) Wyznaczmy odciętą wierzchołka paraboli:

$x_w = 6 \in D_W$, przy czym $a < 0$, więc największą wartością funkcji jest
$y_w = W(x_w) = W(6) = 120$.
Najwięcej osób (120) odwiedziło wystawę szóstego dnia.

Ad b) W sumie wystawę odwiedziło
$W(1) + W(2) + W(3) +... + W(11) = 880$ osób.

**II.** Spostrzeżenia

1. Komputer znacznie przyspiesza tempo prowadzenia lekcji. Zadanie wstępne zajęłoby uczniom sporo czasu bez użycia komputera. Aby narysować wykresy podanych funkcji, uczniowie musieliby wykonać potrzebne obliczenia (wierzchołek paraboli, punkty szczególne itd.). Program pozwala szybko zmieniać dane, wczytywać różne punkty – końce przedziału, i pomaga szybko wyciągnąć ostateczny wniosek.
2. Zadanie 3. nieco różni się od pozostałych. Dziedziną funkcji w tym przypadku nie jest przedział domknięty, lecz jego podzbiór – zbiór dyskretny. Zadanie dotyczy również znajdowania wartości najmniejszej i największej funkcji kwadratowej i omawianą metodę rozwiązania można tu także zastosować.

   Wydaje się, że warto pokazać uczniom tego typu zadanie z życia codziennego.
3. W ramach pracy domowej można polecić uczniom rozwiązanie wybranych przykładów z zadań 2.26, 2.27, 2.31 ze zbioru zadań.

## Scenariusz nr 3

### Zakres podstawowy i rozszerzony

<u>Temat lekcji</u>: „Wykresy niektórych wielomianów. Nierówności wielomianowe”.

<u>Celem lekcji</u> jest utrwalenie pojęcia pierwiastka i pierwiastka wielokrotnego wielomianu oraz wprowadzenie do rozwiązywania nierówności wielomianowych. Obserwacja wykresów różnych wielomianów na ekranie monitora ma pomóc uczniom w sformułowaniu twierdzeń dotyczących liczby pierwiastków wielomianu, w zrozumieniu pojęcia pierwiastka wielokrotnego i wyciągnięciu odpowiednich wniosków dotyczących wykresu wielomianu.

<u>Czas trwania lekcji</u> – dwie jednostki lekcyjne (90 minut).

<u>Forma pracy</u> – praca (w grupach) przy komputerach.

<u>Materiały pomocnicze, środki dydaktyczne</u> – komputery, program (wraz z opisem dostępny na stronie internetowej www.pazdro.com.pl), zestawy zadań dla każdego ucznia (załączniki nr 1 i nr 2)

Zamierzona struktura lekcji

| Kolejne etapy | Przebieg lekcji | Czas | Umiejętności kształtowane na lekcji |
|---|---|---|---|
| I faza Zaangażowanie | Nauczyciel:<br>– informuje uczniów, co będzie przedmiotem zajęć, zapisuje temat na tablicy;<br>– dzieli uczniów na grupy przy komputerach, czuwa nad tym, by każdy miał odpowiednie warunki do pracy;<br>– omawia metodę pracy i sposób korzystania z programu;<br>– rozdaje kartki z zadaniami (załącznik nr 1);<br>– poleca, aby uczniowie wyciągnęli odpowiednie wnioski dotyczące rysowania wykresu wielomianu (zapisuje na tablicy pytania pomocnicze). | 10 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel; |
| II faza Badanie | Uczniowie:<br>– zapoznają się z działaniem programu;<br>– w zeszytach zapisują temat lekcji i polecenia podane na tablicy;<br>– odczytują z postaci iloczynowej wielomianów ich pierwiastki oraz określają ich krotności;<br>– wpisują otrzymane wzory i obserwują na ekranie wykresy odpowiednich funkcji;<br>– dyskutują na temat wykresów, próbują odpowiedzieć na pytania podane przez nauczyciela;<br>– eksperymentują z dowolnymi wielomianami.<br>Nauczyciel:<br>– obserwuje pracę uczniów;<br>– w razie potrzeby odpowiada na pytania i wątpliwości uczniów. | 25 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>komunikacja uczeń-uczeń;<br>dbałość o język matematyczny;<br>analizowanie. |
| III faza Przekształcanie | Uczniowie:<br>– próbują wyciągnąć wnioski na podstawie obserwowanych wykresów;<br>– notują te wnioski w zeszytach. | 5 minut | komunikacja uczeń-uczeń;<br>dbałość o język matematyczny;<br>analizowanie. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV faza Prezentacja | Nauczyciel:<br>– prowadzi dialog z uczniami, zbierając obserwacje i wnioski uczniów;<br>– formułuje twierdzenia dotyczące pierwiastków i wykresów wielomianów. | 5 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>dbałość o precyzję wypowiedzi;<br>analizowanie; |
| V faza Przekształcanie | Nauczyciel:<br>– rozdaje kartki z zadaniami (załącznik nr 2).<br>Uczniowie:<br>– rozwiązują zadanie najpierw w zeszytach, a następnie sprawdzają otrzymane wyniki na komputerze. | 40 minut | komunikacja uczeń-nauczyciel;<br>analizowanie; |
| VI faza Refleksja | Uczniowie:<br>– oceniają przebieg lekcji od strony osiągniętych celów i atrakcyjności zajęć;<br>– wyciągają wnioski do dalszej pracy.<br>Nauczyciel:<br>– podsumowuje pracę uczniów;<br>– zadaje pracę domową. | 5 minut | pogłębienie procesu uczenia się;<br>wnioskowanie. |

**Załącznik nr 1**

Poniżej podano wzory kilku wielomianów. Niektóre z nich są zapisane w postaci iloczynowej, inne w postaci ogólnej:

a) $W(x) = 2(x-3)(x+1)(x-2)$;
b) $W(x) = x^2(x-2)^3$;
c) $W(x) = 3(x-5)^2(1-x)$;
d) $W(x) = -10x^5(x-7)^4(1-2x)$;
e) $W(x) = x^4 + 2x^2 + 3$;
f) $W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$;
g) $W(x) = 0{,}5x^4 - x^2 + 0{,}5$;
h) $W(x) = -x^8 + 3x^6$.

– Wyznacz pierwiastki wielomianów, określ ich krotności.
– Wpisz wzór wielomianu do programu.
– Czy wyznaczone przez Ciebie pierwiastki są zgodne z pierwiastkami wyświetlanymi na ekranie?
– W każdym przypadku oblicz współczynnik przy najwyższej potędze ($a_n$) i określ jego znak
– Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $W(x) > 0$, $W(x) < 0$.

Po obejrzeniu wykresów odpowiedz na pytania:

1. Ile (co najwyżej, co najmniej) pierwiastków może mieć wielomian stopnia $n$?
2. Czy wielomian stopnia nieparzystego (parzystego) może nie mieć pierwiastków?
3. Jak zmienia się wykres wielomianu w otoczeniu pierwiastka o krotności parzystej, a jak w otoczeniu pierwiastka o krotności nieparzystej?
4. Jakie znaczenie ma znak współczynnika przy najwyższej potędze wielomianu?

**Załącznik nr 2**

Rozwiąż nierówności wielomianowe. Następnie narysuj wykres odpowiedniego wielomianu (przy użyciu programu) i sprawdź poprawność rozwiązania nierówności.

a) $(x + 1)^3(x - 3)(x - 4) < 0$;

b) $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4x + 4) < 0$;

c) $-2x^3 - 5x^2 + 18x + 45 \geq 0$;

d) $4x^3 - 7x + 3 > 0$;

e) $x^4 + 9x^3 + 21x^2 - x - 30 > 0$;

f)* $|x^3 - 8| \geq x^2 + 2x + 4$.

**Uwagi i spostrzeżenia**

**I.** Rozwiązanie zadania

Ad a)

$W(x) = 2(x - 3)(x + 1)(x - 2)$ ; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 2 > 0$

$x = 3$, $x = -1$, $x = 2$ (pierwiastki pojedyncze)

$W(x) > 0 \iff x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$

$W(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (2, 3)$.

Ad b)

$W(x) = x^2(x - 2)^3$ ; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 1 > 0$

$x = 0$ (pierwiastek dwukrotny), $x = 2$ (pierwiastek trzykrotny)

$W(x) > 0 \iff x \in (2, +\infty)$

$W(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

Ad c)

$W(x) = 3(x - 5)^2(1 - x)$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = -3 < 0$

$x = 5$ (pierwiastek dwukrotny), $x = 1$ (pierwiastek pojedynczy)

$W(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1)$

$W(x) < 0 \iff x \in (1, 5) \cup (5, +\infty)$.

Ad d)

$W(x) = -10x^5(x-7)^4(1-2x)$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 10 > 0$

$x = 0$ (pierwiastek pięciokrotny), $x = 7$ (pierwiastek czterokrotny), $x = 0{,}5$ (pierwiastek pojedynczy)

$W(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0{,}5;\ 7) \cup (7, +\infty)$

$W(x) < 0 \iff x \in (0; 0{,}5)$.

Ad e)

$W(x) = x^4 + 2x^2 + 3$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 1 > 0$

Wielomian nie ma pierwiastków. Można zauważyć, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ $W(x) > 0$.

Ad f)

$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 1 > 0$

Rozkładamy wielomian na czynniki. Korzystając z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych znajdujemy jeden z pierwiastków:

$W(2) = 0$. Na podstawie twierdzenia Bezouta możemy podzielić wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - 2$. Zapisujemy wielomian w postaci:

$W(x) = (x-2)(x^2 + x - 12) = (x-2)(x+4)(x-3)$

Dany wielomian ma więc trzy pierwiastki pojedyncze: $x = 2$, $x = -4$, $x = 3$.

$W(x) > 0 \iff x \in (-4, 2) \cup (3, +\infty)$

$W(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$.

Ad g)

$W(x) = 0{,}5x^4 - x^2 + 0{,}5$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = 0{,}5 > 0$

Rozkładamy wielomian na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$W(x) = 0{,}5(x^4 - 2x^2 + 1) = 0{,}5(x^2 - 1)^2 = 0{,}5(x-1)^2(x+1)^2$

Wielomian ma więc dwa pierwiastki dwukrotne: $x = 1$, $x = -1$.

$W(x) > 0 \iff x \in \boldsymbol{R} - \{1, -1\}$

Nierówność $W(x) < 0$ nie ma rozwiązań.

Ad h)

$W(x) = -x^8 + 3x^6$; współczynnik przy najwyższej potędze $a_n = -1 < 0$

Rozkładamy wielomian na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$W(x) = -x^6(x^2 - 3) = -x^6(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Wielomian ma pierwiastek sześciokrotny $x = 0$ oraz pierwiastki pojedyncze $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$.

$W(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - \{0\}$
$W(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

**II.** Wnioski

Odpowiedzi na postawione pytania.

Ad 1)
Wielomian stopnia $n$ ma co najwyżej $n$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

Ad 2)
Wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.
(Przykłady a, b, c, f)

Uwaga.
Wielomian stopnia parzystego może nie posiadać pierwiastków (przykład e)

Ad 3)
Jeśli pierwiastek ma krotność nieparzystą, to wykres przechodzi na drugą stronę osi $OX$.
Jeśli pierwiastek ma krotność parzystą, to wykres „odbija się” od osi $OX$.

Ad 4)
Wykres wielomianu rysujemy od prawej strony, zaczynając od góry jeśli $a_n > 0$, od dołu jeśli $a_n < 0$.

**III.** Uwagi do drugiej części lekcji

Przykłady są zaczerpnięte ze zbioru spośród zadań 3.109-3.118.
Ostatni przykład można rozwiązać w klasie realizującej program w zakresie rozszerzonym.

**IV.** Spostrzeżenia

Przedstawiona lekcja jest tylko propozycją dla nauczyciela. Korzystając z omówionego programu można przeprowadzić różne lekcje dotyczące wielomianów i innych funkcji. Program daje możliwość rysowania kilku funkcji w jednym układzie współrzędnych.

W ramach pracy domowej można zadać uczniom wybrane przykłady spośród 3.109–3.118 ze zbioru zadań.