

# **Plan wynikowy**

(zakres podstawowy)

## Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab oraz Elżbiety Świdry: zakres podstawowy – numer dopuszczenia DKOS – 5002 – 05/08. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy” i zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba oraz Elżbiety Świdry, wydany przez Oficynę Edukacyjną \* Krzysztof Pazdro.

Plan ten jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien posiadać uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40% – 60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom oraz ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Nauczycieli, którzy będą korzystać z przedstawionego planu wynikowego, prosimy o wskazówki i uwagi.

*Autorzy*

**ZAKRES PODSTAWOWY klasa 1.**

## Spis treści

1. Elementy logiki. Zbiory. Zbiory liczbowe .....	4
2. Działania w zbiorach liczbowych .....	8
3. Wyrażenia algebraiczne .....	12
4. Geometria płaska – pojęcia wstępne .....	15
5. Geometria płaska – trójkąty .....	19
6. Trygonometria kąta ostrego .....	23
7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta .....	25
8. Funkcja i jej własności .....	27
9. Przekształcenia wykresów funkcji .....	31
10. Funkcja liniowa .....	35

## 1. Elementy logiki. Zbiory. Zbiory liczbowe

### Tematyka zajęć:

- Zdanie w logice i jego negacja.
- Koniunkcja i alternatywa zdań prostych.
- Implikacja i równoważność zdań prostych.
- Definicja i twierdzenie.
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana.
- Zbiór. Działania na zbiorach.
- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory.
- Przedziały.
- Formy zdaniowe.
- Kwantyfikatory.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi;</li> <li>– umie określić wartość logiczną zdania prostego;</li> <li>– potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego;</li> <li>– potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań;</li> <li>– potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych;</li> <li>– potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań;</li> <li>– potrafi odróżnić definicję od twierdzenia;</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne;</li> <li>– potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych;</li> <li>– rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę;</li> <li>– potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego;</li> <li>– potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów;</li> <li>– potrafi podać przykłady zbiorów <math>A</math> i <math>B</math>, jeśli dana</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi negować zdania złożone z koniunkcji i/lub alternatyw zdań;</li> <li>– potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego;</li> <li>– potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów;</li> <li>– potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających formę zdaniową, zawierającą wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego;</li> <li>– zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem;</li> <li>– potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>– zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji) i potrafi je stosować;</li> <li>– potrafi określić wartość logiczną zdania, które jest negacją koniunkcji, oraz zdania, które jest negacją alternatywy zdań prostych;</li> <li>– zna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru;</li> <li>– zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów (<math>\emptyset</math>, <math>\subseteq</math>, <math>\supseteq</math>, <math>\subset</math>, <math>\supset</math>, <math>\cap</math>, <math>\cup</math>, <math>\setminus</math>);</li> <li>– potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych);</li> <li>– potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem;</li> <li>– potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów);</li> <li>– zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów;</li> <li>– potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów skończonych;</li> <li>– potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych: <b><math>N</math>, <math>C</math>, <math>NW</math>, <math>W</math></b>;</li> <li>– potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne;</li> <li>– potrafi przedstawić liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego i w postaci rozwinięcia dziesiętnego;</li> <li>– umie zamienić ułamek o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym na ułamek zwykły;</li> <li>– potrafi zaznaczać liczby wymierne na osi liczbowej;</li> <li>– rozumie pojęcie przedziału, rozpoznaje przedziały ograniczone i nieograniczone;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– jest suma <math>A \cup B</math>, iloczyn <math>A \cap B</math> albo różnica <math>A - B</math>;</li> <li>– zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi zastosować je w działaniach na zbiorach;</li> <li>– potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni <b><math>R</math></b>;</li> <li>– potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych;</li> <li>– potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiórami zbioru <b><math>R</math></b>;</li> <li>– potrafi wyznaczyć dziedzinę formy zdaniowej, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków;</li> <li>– potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających formę zdaniową, która jest koniunkcją albo alternatywą dwóch form zdaniowych prostych;</li> <li>– rozumie zwrot „dla każdego <math>x</math> .....” oraz „istnieje takie <math>x</math>, że .....” i potrafi stosować te zwroty w budowaniu zdań logicznych;</li> <li>– potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem.</li> </ul>
---	---

- potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami;
- potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy;
- potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów;
- odróżnia formę zdaniową jednej zmiennej od zdania;
- potrafi określić dziedzinę prostej formy zdaniowej;
- potrafi wskazać element dziedziny spełniający prostą formę zdaniową.

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań.

- 1) Wyjdź do ogrodu!
- 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki?
- 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8.
- 4) Liczba  $a$  jest liczbą parzystą.
- 5) Warszawa jest stolicą Polski.

#### Zadanie 2.

Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”.

- a) Oceń wartość logiczną zdania.
- b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo logiczne z którego skorzystałeś.

#### Zadanie 3.

Oceń wartość logiczną zdań:

- a)  $-3^2 = 9$     b)  $1^3 - 2^3 = (-1)^3$
- c)  $3(1-8) = -3(8-1)$

#### Zadanie 1.

Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania?

- a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli.
- b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina.

#### Zadanie 2.

Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe.

- a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3 i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21.
- b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18.

#### Zadanie 1.

Napisz negację zdania:

- a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój.
- b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę.

#### Zadanie 2.

Co można powiedzieć o zbiorach  $A$  i  $B$ , jeśli:

- a)  $A \cap B = B$ ;    b)  $A \cap B = A$ ;    c)  $A - B = A \cap B$ ?

#### Zadanie 3.

Udowodnij, że liczba  $\sqrt{2}$  jest niewymierna.

#### Zadanie 4.

Podaj przykład formy zdaniowej, której dziedziną jest zbiór:

- a)  $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$   
i którą spełniają następujące liczby: 2, 3;
- b)  $2, + )$  i którą spełnia liczba 2.

Zadanie 4.

- a) Wyznacz zbiory:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $A - C$ , jeśli:  
 $A = \{-3, -2, -1, 3, 4\}$ ,  $B = \{-2, 0, 1, 3\}$ ,  
 $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
- b) Wykonaj działania na zbiorach:  $C - N$ ,  $W \cap NW$ ,  
 $W \cap R$ .
- c) Wykonaj działania na przedziałach:  
 $(2, 5) \cap (3, 8)$ ;  $(-1, 3) \cap (0, 9)$ ;  
 $(-7, 8) \cup (-7, +\infty)$ .

Zadanie 5.

Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna?

Zadanie 6.

Dana jest forma zdaniowa  $x - \sqrt{3} = 3$ .

- a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej.  
 b) Jaką liczbę należy wstawić w miejsce zmiennej  $x$ , aby otrzymane zdanie było prawdziwe?

Zadanie 3.

Zbiór  $A \cap B$  ma 7 elementów, zbiór  $B$  ma 4 elementy, zaś zbiór  $A$  ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór  $A \cup B$ ?

Zadanie 4

Wiedząc, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną wykaż, że liczba  $2\sqrt{2} - 1$  też jest liczbą niewymierną.

Zadanie 5.

- a) Wyznacz zbiory:  
 $(-3, 2) \cap N$ ;  $C \cap (5, +\infty)$ ;  $C \cap (4, +\infty)$ ;  
 $(2, 5) \cap N$ .
- b) Znajdź dopełnienie danego zbioru w przestrzeni  $R$ :  
 $A = (-7, +\infty)$ ;  $B = \{-4, 3, 5\}$ ,  $C = (2, 8) \cup \{0\}$ .

Zadanie 6.

Dana jest forma zdaniowa:  $(x - 3)(x + 2) = 0$ .

- a) Określ dziedzinę tej formy zdaniowej.  
 b) Podaj zbiór wszystkich elementów spełniających tę formę zdaniową.  
 c) Poprzedź tę formę zdaniową odpowiednim kwantyfikatorem tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.  
 d) Napisz negację zdania z podpunktu c).

Zadanie 5.

Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie:

- a)  $\forall x \in N (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$
- b)  $\exists x \in C \frac{x}{2} \leq 1 \wedge x \leq 0$ .

## 2. Działania w zbiorach liczbowych

### Tematyka zajęć:

- Własności liczb naturalnych i liczb całkowitych.
- Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Równania i nierówności.
- Procenty. Punkty procentowe.
- Wartość bezwzględna liczby.
- Przybliżenie liczby. Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi wskazać liczby pierwsze i liczby złożone;</li> <li>– zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10);</li> <li>– potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze;</li> <li>– potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych;</li> <li>– potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych;</li> <li>– potrafi sprawnie wykonywać działania na ułamkach zwykłych i na ułamkach dziesiętnych;</li> <li>– zna i stosuje w obliczeniach kolejność działań i prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;</li> <li>– potrafi porównywać liczby rzeczywiste;</li> <li>– zna podstawowe wiadomości o równaniach i nierównościach: rozumie pojęcie dziedziny równania (nierówności), rozwiązania równania (nierówności); potrafi rozwiązać proste równania (nierówności);</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera: <math>NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b</math></li> <li>– potrafi podać zapis symboliczny wybranych liczb: np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę naturalną daje daną resztę;</li> <li>– potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach;</li> <li>– potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie;</li> <li>– potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie;</li> <li>– umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkową liczby wymiernej</li> <li>– wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne;</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych;</li> <li>– potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych;</li> <li>– potrafi rozwiązać równania z wartością bezwzględną typu: <math>y + z = 0</math>.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>– zna własność proporcji i potrafi stosować ją do rozwiązywania równań zawierających proporcje;</li> <li>– potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent;</li> <li>– potrafi obliczyć, jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba;</li> <li>– potrafi określić, o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości;</li> <li>– potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych (w tym wzrosty i spadki cen, podatki, kredyty i lokaty);</li> <li>– rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać;</li> <li>– potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych;</li> <li>– potrafi odczytywać dane przedstawione w tabeli lub na diagramie i przeprowadzać analizę procentową przedstawionych danych;</li> <li>– zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną;</li> <li>– potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby;</li> <li>– umie zapisać i obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami;</li> <li>– potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żadaną dokładnością;</li> <li>– potrafi obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny danego przybliżenia;</li> <li>– potrafi obliczyć błąd procentowy przybliżenia;</li> <li>– potrafi szacować wartości wyrażeń.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– zna pojęcie równania tożsamościowego i równania sprzecznego;</li> <li>– zna pojęcie nierówności tożsamościowej i nierówności sprzecznej;</li> <li>– potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu <math>\frac{2}{x-7} - \frac{1}{x-4} = \frac{x-5}{x-2} - 0</math></li> <li>– rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych (oraz bazowych);</li> <li>– potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: <math>x-a = b</math>, <math>x-a &lt; b</math>, <math>x-a &gt; b</math>, <math>x-a \leq b</math>, <math>x-a \geq b</math></li> <li>– potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność;</li> <li>– potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej.</li> </ul>
---	--

## Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraż w metrach.

Zadanie 2.

Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami:

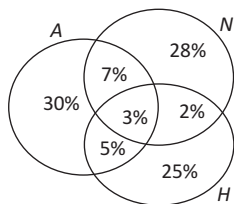
a)  $\frac{1}{8}$  i  $\frac{1}{6}$     b)  $\frac{5}{7}$  i  $\frac{6}{7}$     c)  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{3}$

Zadanie 3.

Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce?

Zadanie 4.

Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (A), hiszpańskim (H) i niemieckim (N), zgodnie z następującym podziałem procentowym:

Zadanie 1.

Wyznacz zbiory  $(A \cap B) \setminus D$ ,  $A \setminus B$ ,  $(A \cup B) \setminus D$ , jeśli:  $A = \{x: x \in \mathbb{C} \wedge x \in [-3, 4)\}$ ,  $B = (-1, 2]$ ,  $D = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x - 2 = 4\}$

Zadanie 2.

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

Zadanie 3.

Podaj przykład równania:

- którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy;
- którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;
- które jest sprzeczne;
- które jest tożsamościowe.

Zadanie 4.

- Oblicz:  $2 - 3\sqrt{3}$
- Rozwiąż nierówność:  $x + 3 \leq 4$
- Przedział liczbowy  $(-5, 7)$  jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność.

Zadanie 5.

Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba  $\frac{2\sqrt{5} - 1}{5}$  należy do przedziału  $\left[\frac{3}{5}, 1\right)$ .

Zadanie 1.

Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 168, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie:  
 $x - y = xy$

Zadanie 3.

Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych wynosi 2.

Zadanie 4.

Rozwiąż:  
a) równanie  $x + 1 + x^2 - 1 = 0$   
b) nierówność  $2 - x + x(x - 2) \leq 0$ .

- a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski?
- b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki?
- c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański?
- d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki?

Zadanie 5.

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej rozwiąż równanie  $x + 3,5 = 5$ .

- a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania.
- b) Wyznacz odwrotność liczby  $\frac{a}{4} - b$ , gdzie  $a, b$  są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 6.

Na zawodach w skokach narciarskich komentator sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122 m, podczas gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5 m. Drugi skok miał długość 123,5 m, zaś komentator ocenił go na 126 m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?

### 3. Wyrażenia algebraiczne

#### Tematyka zajęć:

- Działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym.
- Działania na pierwiastkach arytmetycznych.
- Obliczanie wartości pierwiastków nieparzystego stopnia z liczby ujemnej.
- Działania na wyrażeniach algebraicznych.
- Wzory skróconego mnożenia drugiego i trzeciego stopnia.
- Potęgi o wykładnikach rzeczywistych.
- Definicja logarytmu i prawa działań na logarytmach.
- Przekształcanie wzorów.
- Średnia arytmetyczna, średnia ważona i średnia geometryczna.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym;</li> <li>– zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach;</li> <li>– potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej;</li> <li>– sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych;</li> <li>– potrafi wyłączać wspólny czynnik z różnych wyrażeń;</li> <li>– potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia:  <math>(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math>  <math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math>  <math>a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)</math> </li> </ul> <p>i sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia;</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki;</li> <li>– sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie;</li> <li>– potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias;</li> <li>– potrafi stosować wzory skróconego mnożenia, takie jak:  <math>(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3</math>  <math>(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3</math>  <math>a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)</math>  <math>a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)</math> </li> </ul> <p>w działaniach na wyrażeniach algebraicznych, w tym dwa ostatnie podczas usuwania niewymierności z mianownika ułamka;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia;</li> </ul>	<p>– Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia;</li> <li>– potrafi sprawnie rozkładać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki na czynniki, stosując jednocześnie wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów;</li> <li>– potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu (a także cechy i mantysy logarytmu dziesiętnego) w zadaniach praktycznych.</li> </ul>

- potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń);
- zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach;
- potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych,
- zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji;
- sprawnie przekształca wzory matematyczne, fizyczne i chemiczne;
- zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla podanych liczb.

- potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym;
- zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach;
- stosuje średnią arytmetyczną, średnią ważoną i średnią geometryczną w zadaniach tekstowych.

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia:

$$8^{\frac{1}{3}} \sqrt{3^2 - 4^2} \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} 27^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{64}$$

#### Zadanie 2.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

$$\text{a) } \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$$

#### Zadanie 3.

Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

$$\text{a) } (a-b) - (a-b)^2 \\ \text{b) } (b-a)xy + (a-b)xyz - (b-a)z^2$$

#### Zadanie 1.

Sprowadź wyrażenie:

$$[y^3 : (y^2 - y^{-3})]^4 : \frac{1}{y^4} \frac{1}{y^2} \text{ do najprostszej}$$

postaci i oblicz jego wartość dla  $y = \sqrt{2\sqrt{2}}$ .

#### Zadanie 2.

Wykaż, że liczba  $6^{20} + 3 \cdot 6^{19} - 4 \cdot 6^{18}$  jest podzielna przez 5.

#### Zadanie 3.

Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych:

$$(3x-1)^3 - 3(x+1)(x^2-x+1) + 2(x+2)^3$$

#### Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia:

$$4 \cdot 12^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad 4 \cdot 12^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}^2$$

#### Zadanie 2.

Wykaż, że liczba  $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$  jest całkowita.

#### Zadanie 3.

Rozłóż na czynniki wyrażenia:

$$\text{a) } x^6 - 3 \\ \text{b) } x^4 + 1 \\ \text{c) } x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 4$$

Zadanie 4.

Oblicz:  $3\log(\log_2 32 - \log_5 25)$ .

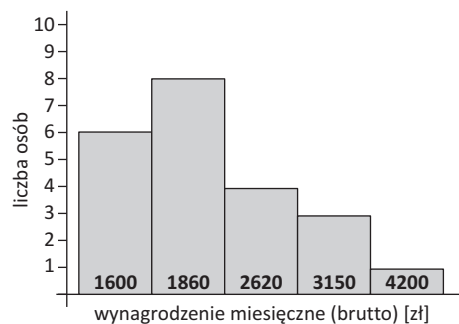
Zadanie 5.

Wyznacz podaną wielkość ze wzoru:

a)  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;  $f$       b)  $P = 2r(r+h)$ ;  $h$

Zadanie 6.

Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.



- Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.
- Podaj, jaki procent pracowników zarabia więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie.
- Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie.

Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.

Zadanie 4.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3} - 1}$$

Zadanie 5.

Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi:  $0,0001^{\sqrt{5}}$ , jeśli  $\sqrt{5} \approx 2,25$

Zadanie 6.

Niech  $\log 2 = a$  i  $\log 3 = b$ . Wyraż za pomocą  $a$  i  $b$  wyrażenie:  $\log 8 - \log_8 6$ .

Zadanie 7.

Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po dołączeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?

Zadanie 4.

Oblicz wartość pH kwasu solnego wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe  $0,05 \text{ mol/dm}^3$ . Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

## 4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

### Tematyka zajęć:

- Punkty, proste, półproste, odcinki, figury wypukłe, figury wklęsłe.
- Figury ograniczone, figury nieograniczone.
- Kąty.
- Położenie prostych na płaszczyźnie.
- Odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi.
- Symetralna odcinka.
- Dwusieczna kąta.
- Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.
- Twierdzenie Talesa.
- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.
- Okrąg i koło.
- Wzajemne położenie prostej i okręgu, wzajemne położenie dwóch okręgów.
- Kąt środkowy w kole i kąt wpisany w koło.
- Kąt dopisany do okręgu.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi;</li> <li>– zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur;</li> <li>– zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur;</li> <li>– umie określić położenie prostych na płaszczyźnie;</li> <li>– rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych;</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund;</li> <li>– potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów w trójkącie (czworokącie);</li> <li>– potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu;</li> <li>– wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku;</li> </ul>	<p>– Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń;</li> <li>– zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych;</li> <li>– umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło;</li> <li>– umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu;</li> <li>– umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.</li> </ul>

- zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę;
- zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań,
- umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka;
- zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające;
- zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach;
- zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych;
- zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu;
- potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu;
- zna określenie stycznej do okręgu;
- zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych zadań;

- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać zadania złożone, wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.

- zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
- umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów;
- posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

Punkt  $C$  dzieli odcinek  $AB$  długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy  $6 : 2$ . Jaka jest długość każdego z odcinków?

#### Zadanie 2.

Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21 . Oblicz miary tych kątów.

#### Zadanie 3.

Na płaszczyźnie dane są punkty:  $A, B, P, Q$  przy czym  $A, B, P, Q$  leżą na jednej prostej,  $AP = \sqrt{12}$  cm,  $BP = 3\sqrt{2}$  cm,  $AQ = \frac{49}{9}$  cm,  $BQ = 5,4$  cm. Sprawdź, czy punkty  $P, Q$  należą do symetralnej odcinka  $AB$ . Z jakiej własności symetralnej skorzystasz?

#### Zadanie 4.

Dany jest odcinek długości  $a$ . Podziel ten odcinek:  
 a) na 5 odcinków równej długości;  
 b) w stosunku 2 : 7.

#### Zadanie 1.

Długości odcinków  $AB, AC, BC, BD$  i  $CD$  spełniają warunki:  $AB = AC + BC$  oraz  $BC + BD = CD$ . Wykaż, że punkty  $A, B, C, D$  leżą na jednej prostej.

#### Zadanie 2.

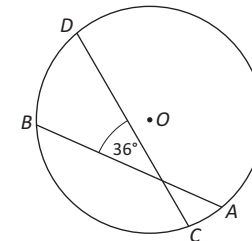
Kąty  $AOC$  i  $BOD$  są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta  $AOC$  jest dwusieczną kąta  $BOD$ .

#### Zadanie 3.

W trójkącie  $ABC$  poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy  $AB$ , dzielące bok  $BC$  na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie  $ABC$  jest o 6 dm większa od długości podstawy  $AB$ . Oblicz  $AB$ .

#### Zadanie 1.

Cięciwy  $AB$  i  $CD$  przecinają się pod kątem  $36^\circ$ . Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom  $AC$  i  $BD$ , jeżeli stosunek ich długości wynosi  $1 : 3$ .



#### Zadanie 2.

Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce  $A$  i  $B$  średnicy  $AB$  tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy  $AB$ .

Zadanie 5.

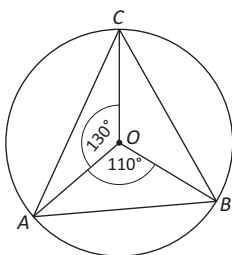
W trapezie  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , mamy dane:  
 $AB = 12$  cm,  $CD = 7$  cm,  $AD = 8$  cm. O ile należy  
 wydłużyć ramię  $AD$ , aby przecięto się z  
 przedłużeniem ramienia  $BC$ ?

Zadanie 6.

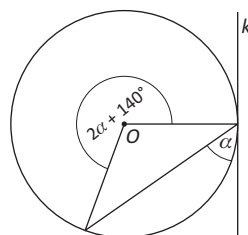
Miara kąta utworzonego przez dwa promienie  
 okręgu wynosi  $146^\circ$ . Oblicz miarę kąta, który  
 tworzą styczne poprowadzone przez końce tych  
 promieni.

Zadanie 7.

Wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .

Zadanie 4.

Prosta  $k$  jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta  
 $\alpha$  dopisanego do okręgu:

Zadanie 5.

Dane są dwa okręgi  $o(A, r_1)$ ,  $o(B, r_2)$  takie, że  
 $r_1 = 3k + 1$ ,  $r_2 = 2k + 3$ ,  $AB = 6k - 3$ . Określ położenie  
 okręgów, w zależności od parametru  $k$ .

Zadanie 6.

Z punktu zewnętrznego  $A$  poprowadzono styczne  
 $AB$  i  $AC$  do okręgu o środku w punkcie  $O$  ( $B, C$  –  
 punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między  
 stycznymi równa się mierze kąta zawartego  
 między promieniami poprowadzonymi ze środka  
 koła do punktów styczności, to czworokąt  $ABOC$   
 jest kwadratem.

Zadanie 3.

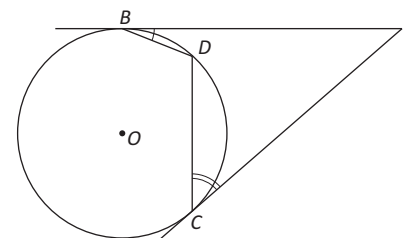
Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie:  
 Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich  
 boków czworokąta wypukłego, to sumy długości  
 dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są  
 sobie równe.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czwo-  
 rokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to  
 sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są  
 równe  $180^\circ$ .

Zadanie 5.

Punkt  $D$  leży na łuku  $BC$  wewnątrz trójkąta  $ABC$ .  
 Wykaż, że suma  $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle ACD|$  jest stała  
 (tzn. nie zależy od położenia punktu  $D$  na łuku  $BC$ ).  
 Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt  $D$   
 będzie leżał na łuku  $BC$  na zewnątrz trójkąta  $ABC$ ?



## 5. Geometria płaska – trójkąty

### Tematyka zajęć:

- Trójkąty – podział, własności.
- Suma kątów w trójkącie.
- Nierówność trójkąta.
- Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie.
- Twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Zależności między bokami i kątami w trójkącie.
- Wysokości w trójkącie.
- Środkowe w trójkącie.
- Symetralne boków trójkąta.
- Okrąg opisany na trójkącie.
- Dwusieczne kątów trójkąta.
- Okrąg wpisany w trójkąt.
- Przystawanie trójkątów.
- Podobieństwo trójkątów.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty;</li> <li>– wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie;</li> <li>– zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt;</li> <li>– zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;</li> <li>– zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań;</li> <li>– potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie;</li> <li>– zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną;</li> <li>– potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość pro-</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń;</li> <li>– potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie;</li> <li>– potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną.</li> </ul>

- zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny;
  - umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny;
  - umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie;
  - zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań;
  - zna pojęcie środka ciężkości trójkąta;
  - zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie;
  - wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg;
  - zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie;
  - wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg;
  - zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt;
  - zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego
- mienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta;
  - potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów;
  - potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka;
  - potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta;
  - potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie;
  - umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych;
  - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie;
  - potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności;
  - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń.

w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej;

- zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna trzy cechy przystawiania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązaniach prostych zadań;
- umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta.

#### Zadanie 2.

Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.

#### Zadanie 3.

Dane są odcinki długości  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ . Skonstruuj odcinek długości:  $\frac{\sqrt{3ac}}{\sqrt{2b}}$ .

#### Zadanie 1.

Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną.

#### Zadanie 2.

W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przedłużono przeciwprostokątną  $AB$  i obrano na przedłużeniach punkty  $D$  i  $E$  tak, że  $AD = AC$  oraz  $BE = BC$ . Oblicz miarę kąta  $DCE$ .

#### Zadanie 3.

W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm.

- a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
- b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok.

#### Zadanie 1.

Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

#### Zadanie 2.

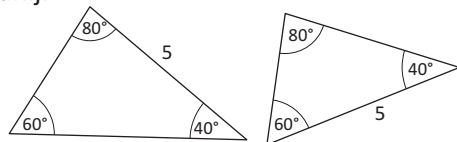
W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość  $a$ . Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę?

#### Zadanie 3.

Niech  $a$ ,  $b$ ,  $c$  będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność:  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ .

Zadanie 4.

Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5.

W trójkącie  $ABC$  dane są długości boków:  $AB = 12$  cm,  $BC = 8$  cm,  $AC = 10$  cm. Punkt  $D$  dzieli bok  $AB$  na takie dwa odcinki, że  $AD : DB = 3 : 5$ . Przez punkt  $D$  poprowadzono prostą równoległą do boku  $AC$ , która przecięła bok  $BC$  w punkcie  $E$ . Oblicz długości odcinków:  $CE$ ,  $BE$  i  $DE$ .

Zadanie 6.

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm.

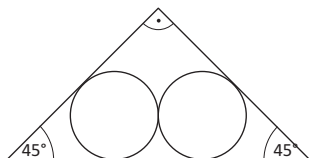
Spodek tej wysokości leży w odległości  $1\frac{1}{6}$  cm od

środku okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:

- długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
- długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.

W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).



Oblicz obwód tego trójkąta.

- c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.

Zadanie 4.

Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.

W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przyprostokątne mają długość:  $AB = 32$  cm,  $AC = 24$  cm. Symetralna boku  $BC$  przecina ten bok w punkcie  $D$ , bok  $AB$  w punkcie  $E$  i przedłużenie boku  $AC$  w punkcie  $F$ . Udowodnij, że trójkąt  $EBD$  jest podobny do trójkąta  $EAF$  i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.

Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ . Punkty  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  leżą na bokach trójkąta  $ABC$  (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta  $PQR$  jest prostopadły do jednego boku trójkąta  $ABC$ .

- Wykaż, że trójkąt  $PQR$  jest równoboczny.
- Wyznacz stosunek  $\frac{AB}{PQ}$ .

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AB = AC$  oraz  $\sphericalangle ABC = 3 \sphericalangle BAC$ . Wykaż, że jeżeli półproste  $BK$  i  $BL$  dzielą kąt  $\sphericalangle ABC$  na trzy równe części ( $\sphericalangle LBC = \frac{1}{3} \sphericalangle ABC$ ), to trójkąty  $BCL$ ,  $BCK$ ,  $BKA$  są równoramienne.

Zadanie 5.

Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie  $A$ . Znajdź odległość punktu  $A$  od prostej, do której nie należy punkt  $A$ , a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

## 6. Trygonometria kąta ostrego

### Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym.
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków;</li> <li>– potrafi znaleźć w tablicach kąt o danej wartości funkcji trygonometrycznej;</li> <li>– potrafi odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego;</li> <li>– zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>;</li> <li>– potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>;</li> <li>– potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest jedna z nich;</li> <li>– zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta ostrego):  <math display="block">\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1;</math> </li> <li>– zna wzory redukcyjne dla kąta <math>90^\circ - \alpha</math>, gdzie <math>\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)</math> i potrafi je stosować w obliczeniach;</li> <li>– potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne;</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;</li> <li>– potrafi wykorzystać kilka zależności trygonometrycznych w rozwiązaniu zadania;</li> <li>– potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.</li> </ul>

– potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia:  
 $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$ .

#### Zadanie 2.

W trójkącie prostokątnym  $ABC$  dane są: długość przeciwprostokątnej  $BC = \sqrt{146}$  cm oraz długość przyprostokątnej  $AB = 5$  cm.

- Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.
- Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych).
- Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną.

#### Zadanie 3.

Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę  $48^\circ$ . Jaką wysokość ma wieża?

#### Zadanie 4.

Zbuduj kąt o mierze  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$  takiej, że

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{b) } \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ .

#### Zadanie 1.

Zbuduj kąt o mierze  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$  takiej, że

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{b) } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}.$$

Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ .

#### Zadanie 2.

Postępując się wzorem  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ , oblicz  $\sin 15^\circ$ .

#### Zadanie 3.

W trójkącie prostokątnym  $a, b$  oznaczają długości przyprostokątnych,  $\alpha$  jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości  $a$ . Wiedząc, że

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, \text{ oblicz:}$$

a) tangens  $\alpha$

$$\text{b) wartość wyrażenia: } \frac{b}{a} \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

#### Zadanie 4.

Sprawdź, czy równość

$$\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

jest tożsamością trygonometryczną wiedząc, że  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ .

#### Zadanie 1.

Wykaż, że równanie  $\sin x = 2 \sin 48^\circ \cos 42^\circ$  nie ma rozwiązań.

#### Zadanie 2.

Wiedząc, że  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , oblicz  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ .

#### Zadanie 3.

Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości  $h$  metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji  $\alpha$  przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie  $t$  sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt  $\beta$ . Z jaką średnią prędkością  $v$  wznosi się balon?

Zadanie 5.

Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora:

- a)  $\cos^2 71^\circ + \cos^2 19^\circ$   
 b)  $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ$

Zadanie 5.Niech  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczać miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

## 7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

### Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej.
- Pole trójkąta prostokątnego, trójkąta równoramiennego, trójkąta równobocznego.
- Wzory na pole trójkąta:  $P = \frac{1}{2}ah$ ,  $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ ,  $P = (a + b + c) r$ ,  $P = \frac{abc}{4R}$ , wzór Herona – i ich zastosowanie.
- Pola trójkątów podobnych.
- Pole koła.
- Pole wycinka koła.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: <ul style="list-style-type: none"> <li>– rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta;</li> <li>– zna następujące wzory na pole trójkąta:  <math>P = \frac{1}{2}a h_a</math>, <math>P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma</math>, <math>P = \frac{abc}{4R}</math>, <math>P = \frac{1}{2}p r</math>,  <math>P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}</math>, gdzie <math>p = \frac{a+b+c}{2}</math>;</li> <li>– potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia;</li> </ul>	Uczeń: <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: <math>P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma</math>, <math>P = \frac{1}{2}p r</math>,              gdzie <math>p = \frac{a+b+c}{2}</math>, ze wzoru <math>P = \frac{1}{2}ah_a</math>;</li> <li>– potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów;</li> </ul>	Uczeń: <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole;</li> <li>– potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie;</li> <li>– zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań;</li> <li>– zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań;</li> <li>– wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i uwzględniając wcześniej poznane twierdzenia geometryczne.</li> </ul>	
---	--	--

### Przykładowe zadania

<p><u>Zadanie 1.</u> Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu <math>504 \text{ cm}^2</math> wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) pole trójkąta;</li> <li>b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt;</li> <li>c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.</li> </ol>	<p><u>Zadanie 1.</u> W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Na trójkącie <math>ABC</math>, w którym <math>AC = BC</math>, opisano okrąg o środku <math>O</math> i promieniu <math>R = 20 \text{ cm}</math>. Wiedząc, że <math>\sphericalangle AOB = 120^\circ</math>, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki.</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Wyznacz długość boku <math>c</math> trójkąta, jeśli dane są długości <math>a, b</math> dwóch jego boków oraz wiadomo, że <math>h_a + h_b = h_c</math>, gdzie <math>h_a, h_b, h_c</math> są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta.</p>
--	---	--

Zadanie 3.

W trójkącie ostrokątnym, którego pole jest równe  $27 \text{ cm}^2$ , dwa boki mają długość  $18 \text{ cm}$  i  $6 \text{ cm}$ . Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami?

Zadanie 4.

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość  $6 \text{ cm}$  i  $8 \text{ cm}$ . Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

Zadanie 5.

Kąt wpisany w koło ma miarę  $45^\circ$  i jest oparty na łuku długości  $3 \text{ cm}$ . Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk.

Zadanie 6.

Trójkąt równoboczny  $A B C$  jest podobny do trójkąta  $A B C$  w skali  $s = 3$ . Pole trójkąta  $A B C$  jest równe  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Oblicz długość boku trójkąta  $A B C$ .

Zadanie 3.

W trójkącie równoramiennym podstawa ma  $16 \text{ cm}$  długości, a ramię ma  $17 \text{ cm}$  długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta.

Zadanie 4.

Prosta równoległa do podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ , przecinająca ramiona  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ , dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka  $C$ ) dzieli ona ramiona trójkąta?

Zadanie 5.

W wycinek koła o promieniu  $6 \text{ cm}$  wpisano okrąg o promieniu  $2 \text{ cm}$ . Oblicz pole wycinka koła.

Zadanie 3.

Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta.

Zadanie 4.

Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem:

$$P = \frac{abc}{4R}, \text{ gdzie } a, b, c \text{ oznaczają długości boków}$$

trójkąta,  $R$  to długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli trójkąt jest:

- prostokątny
- ostrokątny.

## 8. Funkcja i jej własności

### Tematyka zajęć:

- Pojęcie funkcji; pojęcie funkcji liczbowej.
- Sposoby opisywania funkcji.
- Dziedzina funkcji liczbowej.
- Zbiór wartości funkcji liczbowej.
- Wykresy niektórych funkcji liczbowych.
- Miejsce zerowe funkcji liczbowej.

- Monotoniczność funkcji liczbowej.
- Funkcje różnowartościowe.
- Najmniejsza i największa wartość funkcji.
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu.
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań;</li> <li>– potrafi podawać przykłady funkcji;</li> <li>– potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym;</li> <li>– potrafi naszkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem;</li> <li>– potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest;</li> <li>– potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach);</li> <li>– potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach);</li> <li>– potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość;</li> <li>– potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym);</li> <li>– potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak:               <ol style="list-style-type: none"> <li>a) dziedzina funkcji</li> <li>b) zbiór wartości funkcji</li> <li>c) miejsca zerowe funkcji</li> </ol> </li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunktory warunków, dotyczących mianowników lub pierwiastków stopnia drugiego, występujących we wzorze;</li> <li>– potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej wzorem;</li> <li>– potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym;</li> <li>– potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji;</li> <li>– potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami ciągłej na podstawie wzoru tej funkcji;</li> <li>– potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić takie jej własności jak: dziedzina, zbiór wartości, różnowartościowość oraz monotoniczność;</li> <li>– potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach.</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi narysować wykresy takich funkcji jak: <math>y = \text{reszta z dzielenia } x \text{ przez } 3</math>, gdzie <math>x \in \mathbf{C}</math>, <math>y = \text{sgn } x</math>, <math>y = [x]</math>, <math>y = x - [x]</math>, <math>y = \frac{x^2}{x}</math>, <math>y = \sqrt{x^2}</math> itp. i omówić ich własności;</li> <li>– umie na podstawie definicji udowodnić, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w danym przedziale.</li> </ul>

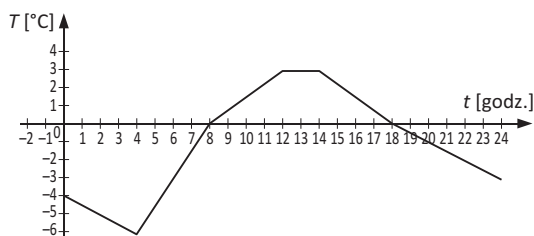
<p>d) argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji</p> <p>e) wartość funkcji dla danego argumentu</p> <p>f) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała</p> <p>g) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne</p> <p>h) najmniejszą oraz największą wartość funkcji;</p> <p>– potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych);</p> <p>– potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji.</p> <p>– umie na podstawie wykresów funkcji <math>f</math> i <math>g</math> podać zbiór rozwiązań równania <math>f(x) = g(x)</math> oraz nierówności typu: <math>f(x) &lt; g(x)</math>, <math>f(x) \geq g(x)</math>.</p>		
---	--	--

### Przykładowe zadania

<p><u>Zadanie 1.</u> Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: „Każdej liczbie ze zbioru <math>A = \{0, 1, 4, 9, 16\}</math> przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”. Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Dana jest funkcja o wzorze <math>f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}</math>.</p> <p>a) Określ dziedzinę tej funkcji.</p> <p>b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.</p> <p>c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu <math>(-9)</math>.</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem</p> $f(x) = \sqrt{3-2x} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}$ <p>b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze</p> $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ <p><u>Zadanie 2.</u> Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział <math>[-6, 6]</math>; zbiorem wartości jest przedział <math>(-1, +\infty)</math>; wykres funkcji jest symetryczny względem osi <math>OY</math>; funkcja jest rosnąca w przedziale <math>[-6, 0]</math> oraz <math>f(0) = 4</math>. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja?</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> Dana jest funkcja <math>f(x) =</math> reszta z dzielenia <math>x</math> przez 5, gdzie <math>x \in \mathbb{C}</math>.</p> <p>a) Narysuj wykres tej funkcji dla <math>x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>.</p> <p>b) Napisz wzór opisujący miejsca zerowe tej funkcji.</p> <p>c) Podaj zbiór wartości funkcji.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Narysuj wykres funkcji <math>y = x - [x]</math> dla <math>x \in [-3, 4]</math> i na podstawie wykresu omów jej własności. Uwaga! Symbolem <math>[x]</math> oznacz największą liczbę całkowitą nie większą od <math>x</math>.</p>
---	--	--

Zadanie 3.

Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.



Odpowiedz na pytania:

- W jakich godzinach dokonywano pomiaru?
- W jakim przedziale mieszczą się zanotowane temperatury?
- W jakich godzinach temperatura wyniosła 0 ?
- W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna?
- W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?
- Jaką wartość miała temperatura w godzinach 12, 14 ?
- Jaką najniższą wartość wskazał termograf?

Zadanie 4.

Odległość  $d$  [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy  $t$  [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór:  $d(t) = 180 - 45t$ .

- Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu?
- W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy?
- Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety?
- Jaką długość ma etap wyścigu?

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem:

$$x^2 \text{ dla } x \geq 2$$

$$x^3 \text{ dla } 1 < x < 1$$

$$\sqrt{x} \text{ dla } x < 1$$

- Oblicz wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $3\frac{3}{8}$ .
- Dla jakiego dodatniego argumentu  $a$  zachodzi równość  $f(a) = -f(-a)$ ?

Zadanie 4.

W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy opisany wzorem:

$$0 \text{ dla } 0 \leq x \leq 800$$

$$f(x) = 0,05x - 40 \text{ dla } 800 < x \leq 2000$$

$$0,2x - 340 \text{ dla } x > 2000$$

gdzie  $x$  – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś  $f(x)$  oznacza wysokość podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 3.

Porównaj dziedziny i wykresy funkcji  $f$  i  $g$ , jeśli:

$$a) f(x) = x \text{ i } g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$b) f(x) = x \text{ i } g(x) = \frac{x^2}{x}$$

$$c) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ i } g(x) = \frac{x}{x}$$

Zadanie 4.

Symbol  $\max(a, b)$  oznacza większą z liczb  $a, b$  lub równą  $a$ , jeśli  $a = b$ . Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , określonej wzorem:  $f(x) = \max(x, x^2)$ , gdzie  $x \in \mathbf{R}$ .

**Zadanie 5.**

Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż:

- a) równanie  $x^2 = x$   
 b) nierówność  $\frac{1}{x} < x^3$

## 9. Przekształcenia wykresów funkcji

### Tematyka zajęć:

- Wektor w prostokątnym układzie współrzędnych; współrzędne wektora.
- Długość wektora (odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej).
- Wektory równe, wektory przeciwne.
- Działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie i mnożenie wektora przez liczbę.
- Przesunięcie równoległe wzdłuż osi  $OX$  i wzdłuż osi  $OY$ .
- Przesunięcie równoległe o wektor  $w = [p, q]$ .
- Symetria osiowa. Figury osiowosymetryczne.
- Symetria osiowa względem osi  $OX$  i względem osi  $OY$ .
- Symetria środkowa. Figury środkowosymetryczne.
- Symetria środkowa względem punktu  $(0, 0)$ .

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora;	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykres funkcji: $y = f(x - a) + b$ ;	Uczeń: – potrafi wykorzystać działania na wektorach do dowodzenia różnych twierdzeń geometrycznych; – potrafi naszkicować wykres funkcji, której sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń;

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej);</li> <li>– zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów przy rozwiązywaniu zadań;</li> <li>– potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie);</li> <li>– potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka;</li> <li>– zna pojęcie przesunięcia równoległego o wektor i potrafi wyznaczyć obraz figury w przesunięciu równoległym o dany wektor;</li> <li>– zna pojęcie symetrii osiowej względem prostej i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii osiowej względem tej prostej;</li> <li>– zna pojęcie symetrii środkowej względem punktu i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii środkowej względem dowolnego punktu;</li> <li>– potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi <math>OX</math> oraz osi <math>OY</math>;</li> <li>– potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem punktu <math>(0,0)</math>;</li> <li>– zna i rozumie pojęcia środka symetrii figury;</li> <li>– zna i rozumie pojęcie osi symetrii figury;</li> <li>– potrafi wskazać oś symetrii figury i środek symetrii figury, a także potrafi wskazać figury osiowo- i środkowosymetryczne;</li> <li>– potrafi narysować wykres funkcji <math>y = f(x) + q</math>, <math>y = f(x - p)</math>, <math>y = -f(x)</math> w przypadku, gdy dany jest wykres funkcji <math>y = f(x)</math>;</li> <li>– potrafi narysować wykresy funkcji określonych wzorami typu: <math>y = (x + 3)^2</math>; <math>y = x - 4</math>; <math>y = -\frac{1}{x}</math>;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji <math>f</math> o dany wektor;</li> <li>– potrafi na podstawie wykresu funkcji <math>f</math> sporządzić wykresy funkcji: <math>y = f(x)</math>, <math>y = f(-x)</math>, <math>y = -f(-x)</math>;</li> <li>– potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji <math>f</math> względem osi <math>OX</math>, osi <math>OY</math>, początku układu współrzędnych;</li> <li>– umie podać własności funkcji: <math>y = f(x - p) + q</math>, <math>y = f(-x)</math>, <math>y = -f(-x)</math>, <math>y = f(x)</math> w oparciu o dane własności funkcji <math>y = f(x)</math>;</li> <li>– potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych przy rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem <math>f(x) = m</math>, w oparciu o wykres funkcji <math>f</math>;</li> <li>– potrafi rozwiązać nietypowe zadania, dotyczące przekształceń wykresów funkcji o podwyższonym stopniu trudności.</li> </ul> |
|---|--|---|

– umie podać własności funkcji:  $y = f(x) + q$ ,  
 $y = f(x - p)$ ,  $y = -f(x)$  w oparciu o dane własności  
 funkcji  $y = f(x)$ .

### Przykładowe zadania

#### Zadanie 1.

Dane są punkty:  $A(2, 5)$ ,  $B(-4, 6)$ .

- Wyznacz współrzędne wektora  $AB$ .
- Oblicz długość wektora  $AB$ .

#### Zadanie 2.

Dany jest wektor  $AB = [3, -6]$  oraz współrzędne punktu  $B(-1, 4)$ .

- Oblicz współrzędne punktu  $A$ .
- Wyznacz współrzędne środka odcinka  $AB$ .

#### Zadanie 3.

Prędkość własna motorówki wynosi 12 km/h. Płynąc pod prąd, motorówka pokonuje odległość między przystanią  $A$  i przystanią  $B$  w czasie 28 minut. Ile minut będzie płynąć motorówka z przystani  $B$  do przystani  $A$ , jeśli prędkość prądu rzeki wynosi 4 km/h?

#### Zadanie 4.

Narysuj dowolny trójkąt  $ABC$ , a następnie znajdź jego obraz:

- w symetrii środkowej względem punktu  $O$  znajdującego się wewnątrz trójkąta;
- w symetrii osiowej względem dowolnej prostej, która nie ma z tym trójkątem punktów wspólnych;
- w przesunięciu równoległym o wektor  $AC$ .

#### Zadanie 1.

Dane są wektory:  $a = [1, -1]$ ,  $b = [2, -1]$ ,  
 $c = [-5, -7]$ . Wyznacz takie liczby rzeczywiste  $k, l$ ,  
 aby  $k \cdot a + l \cdot b = c$ .

#### Zadanie 2.

Dany jest odcinek o końcach  $A(2, -5)$ ,  $B(-4, 7)$ .  
 Wyznacz współrzędne punktu  $P$ , który dzieli odcinek  $AB$  w taki sposób, że  $\frac{PB}{AB} = \frac{1}{3}$ .

#### Zadanie 3.

O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{x} - 3$ , aby otrzymać wykres funkcji:

- $g(x) = \sqrt{x} + 1$
- $h(x) = \sqrt{x - 2}$ ?

#### Zadanie 4.

Dana jest funkcja  $g(x) = 2x - 6$ . Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $y = f(x)$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji  $f$ .

#### Zadanie 5.

Naszkiuj wykres funkcji  $f(x) = x - 2$ . Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż:

- równania:  $x - 2 = 3$ ;  $x - 2 = x$
- nierówności:  $x - 2 > 2$ ;  $x - 2 > x^2$ .

#### Zadanie 1.

Korzystając z działań na wektorach udowodnij, że:

- odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta ma długość równą połowie długości trzeciego boku tego trójkąta;
- długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw tego trapezu.

#### Zadanie 2.

Naszkiuj wykresy funkcji:

- $y = -\frac{1}{x} - 2$
- $y = x^3 - 1$
- $y = -\sqrt{x + 3}$
- $y = x + 5 - 3$

#### Zadanie 3.

W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru  $m$ :

- $x - 5 - 2 = m$
- $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = m$ .

Zadanie 5.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek  $AB$ , gdzie  $A(-2, 4)$ ,  $B(-5, -3)$ , a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka:

- w symetrii względem osi  $OX$
- w symetrii względem osi  $OY$
- w symetrii względem początku układu współrzędnych
- w przesunięciu równoległym o wektor  $u = [1, -3]$ .

Zadanie 6.

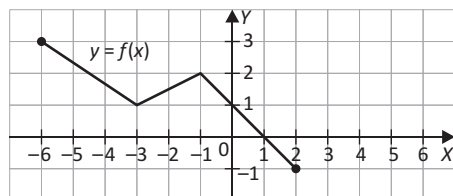
Narysuj trójkąt równoboczny i narysuj wszystkie jego osie symetrii. Czy trójkąt równoboczny ma środek symetrii? Narysuj czworokąt, który ma dwie osie symetrii i środek symetrii.

Zadanie 7.

Dana jest funkcja  $f(x) = x^3$ . Naszkicuj wykres funkcji: a)  $y = x^3 + 2$ ; b)  $y = (x + 1)^3$ ; c)  $y = -x^3$ .

Zadanie 8.

Dany jest wykres funkcji  $y = f(x)$ .



- Napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres powstanie w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OX$  o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma funkcja  $g$ ?
- Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $h$ , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f$  w symetrii względem osi  $OX$ .

## 10. Funkcja liniowa

### Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta.
- Definicja funkcji liniowej. Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej.
- Własności funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego.
- Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zna pojęcie i wykres proporcjonalności prostej</li> <li>– zna pojęcie funkcji liniowej;</li> <li>– potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej;</li> <li>– zna zależność pomiędzy miejscami zerowym funkcji liniowych a współczynnikami we wzorach tych funkcji;</li> <li>– potrafi wyznaczyć algebraicznie punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu;</li> <li>– potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem;</li> <li>– potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji;</li> <li>– potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa osiąga wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne);</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi narysować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić jej własności;</li> <li>– potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś <math>OY</math>;</li> <li>– potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne);</li> <li>– potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu;</li> <li>– potrafi opisać daną figurę geometryczną w prostokątnym układzie współrzędnych za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;</li> <li>– potrafi narysować w prostokątnym układzie współrzędnych figurę geometryczną zapisaną</li> </ul>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności, w tym zadania z parametrem.</li> </ul>

- potrafi sprawdzić algebraicznie czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej;
- potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty);
- potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych;
- potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych;
- potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą;
- potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą podstawiania, metodą przeciwnych współczynników) i graficznie układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną;
- potrafi zbadać wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie;
- potrafi rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do równania liniowego z jedną niewiadomą, nierówności liniowej z jedną niewiadomą lub układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu (wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć).

- za pomocą układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;
- potrafi wykorzystać wiedzę o funkcji liniowej w zadaniach o średnim stopniu trudności.

## Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Rozważmy koła o promieniach różnej długości. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do średnicy tego koła? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności?

Zadanie 2.

Napisz wzór funkcji liniowej  $f$  wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba 2 i  $f(0) = 8$ .

Zadanie 3.

Dana jest funkcja liniowa określona wzorem  $y = \frac{2}{3}x - 5$ . Napisz wzór funkcji liniowej, której

wykres jest:

- równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt  $A(-8, 4)$ ;
- prostopadły do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt  $B(9, -2)$ .

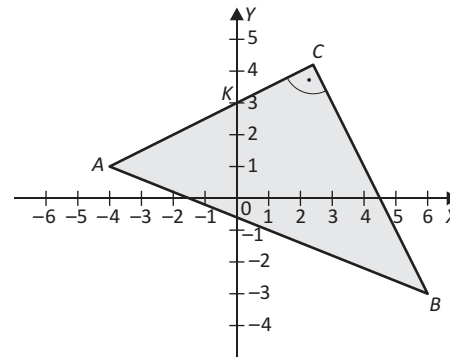
Zadanie 4.

W wannie o pojemności 200 litrów znajdowało się 20 litrów wody. Po odkręceniu kurków do wanny napływa 15 litrów wody w ciągu minuty.

- Po ilu minutach wanna będzie pełna?
- Napisz wzór funkcji opisującej zależność liczby litrów wody w wannie od czasu w godzinach (liczonego od chwili odkręcenia kurków do chwili napełnienia wanny).
- Narysuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych.

Zadanie 1.

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.



dane:  $A(-4, 1)$ ,  $K(0, 3)$   
 $B(6, -2)$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$

Zadanie 2.

Z okazji rozpoczęcia roku szkolnego do sali gimnastycznej wniesiono ławki dla wszystkich uczniów tej szkoły. Gdyby na każdej ławce usiadło 6 uczniów, to zabrakłoby dwóch ławek. Gdyby zaś na każdej ławce usiadło 8 uczniów, to zostałyby 3 ławki puste. Ilu jest uczniów w tej szkole i ile ławek wniesiono do sali gimnastycznej?

Zadanie 3.

Dana jest funkcja opisana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{dla } x < 2 \\ x - 3 & \text{dla } 2 \leq x < 8 \\ x - 10 & \text{dla } x \geq 8 \end{cases}$$

Zadanie 1.

Wyznacz funkcję liniową  $f$ , która dla każdego  $x$  spełnia warunek:  $f(2x - 1) = -6x + 4$ . **R**

Zadanie 2.

Funkcję  $y = \operatorname{sgn}(a)$  (co oznacza znak liczby  $a$ ), definiujemy następująco:

$$1 \text{ dla } a > 0$$

$$\operatorname{sgn}(a) = 0 \text{ dla } a = 0$$

$$-1 \text{ dla } a < 0$$

Na podstawie powyższej definicji narysuj wykres funkcji:  $f(x) = -2\operatorname{sgn}(-3x + 1) + 5$ .

Zadanie 3.

Wyznacz liczbę rozwiązań równania:

$$ax + 1 = x + a^2, \text{ w zależności od wartości parametru } a.$$

Zadanie 4.

Dla jakich wartości  $a$  para liczb  $(x, y)$ , spełniająca

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = 2a - 6 \end{cases}$$

spełnia również nierówność  $x - y > 6$ ?

Zadanie 5.

Dane są funkcje liniowe:  $f(x) = \frac{1}{2}ax - b$  oraz

$$g(x) = -\frac{1}{2}bx + a, \text{ gdzie } a \neq -b. \text{ Wykresy obu funkcji}$$

przecinają oś  $OX$  w tym samym punkcie  $A$ .

Wyznacz odcięta punktu  $A$ .

Zadanie 5.

Do marynowania podgrzybków potrzebny jest ocet 6%. Pani Kowalska kupiła 1 litr octu 10%. Ile wody powinna dolać do zakupionego octu, aby otrzymać ocet do marynaty o żądanym stężeniu?

Zadanie 6.

Wyznacz wzór funkcji liniowej wiedząc, że funkcja przyjmuje wartość 3 dla argumentu  $-2$  oraz  $f(x) < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (1, +\infty)$ .

Zadanie 7.

W 1980 roku łączna emisja zanieczyszczeń pyłowych i gazowych w Polsce wynosiła 7,3 mln ton. W ciągu 12 lat emisja zanieczyszczeń pyłowych zmniejszyła się o 70%, a zanieczyszczeń gazowych o 37% tak, że w sumie masa tych zanieczyszczeń wyniosła 3,84 mln ton. Oblicz, jaka była emisja zanieczyszczeń pyłowych, a jaka gazowych w 1992 roku.

- Oblicz miejsca zerowe funkcji  $f$ .
- Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś  $OY$ .
- Narysuj wykres funkcji  $f$  i na podstawie wykresu określ:
  - przedziały monotoniczności funkcji
  - zbiór tych argumentów, dla których funkcja osiąga wartości dodatnie.

Zadanie 4.

Dana jest funkcja liniowa  $y = (m + 10)x - m$ . Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla którego:

- wykres funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych;
- miejsce zerowe funkcji  $f$  jest równe 0,5;
- dana funkcja jest malejąca;
- dla argumentu 5 funkcja przyjmuje wartość 2.

Zadanie 5.

Pan Kowalski otrzymuje stałe wynagrodzenie miesięczne oraz dodatkowo wynagrodzenie za nadgodziny. Za każdą godzinę nadliczbową otrzymuje o 50% więcej niż za godzinę etatową. W marcu miał 20 nadgodzin i otrzymał 1800 zł, zaś w kwietniu miał 16 nadgodzin i otrzymał 1746 zł.

- Oblicz:
  - stawkę za godzinę nadliczbową
  - stawkę za godzinę etatową
  - wysokość stałego wynagrodzenia miesięcznego.
- Napisz wzór opisujący wynagrodzenie miesięczne pana Kowalskiego, w zależności od liczby przepracowanych nadgodzin, jeśli wiadomo, że maksymalna liczba nadgodzin w miesiącu nie może przekroczyć 30 godzin.