

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Program nauczania w liceach i w technikach

Zakres podstawowy



Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro

Program dopuszczony do użytku szkolnego przez Ministra Edukacji Narodowej,
na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego
i mgr. Marka Sadowskiego.

Numer dopuszczenia: DKOS-5002-05/08

Projekt okładki i strony tytułowej
Stefan Drewiczewski, FOQS

Łamanie
Grzegorz Bogucki, GB Studio

Redaktor
Teresa Maciszewska

© Copyright by Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Spółka z o.o.
Warszawa 2008 r.

Druk i oprawa
Zakłady Graficzne MOMAG SA
ul. Farbiarska 28/32
97-200 Tomaszów Mazowiecki

Wydanie I, Warszawa 2008 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Spółka z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
www.pazdro.com.pl
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl

ISBN 978-83-89023-94-0

SPIS TREŚCI

I.	Wstęp	5
II.	Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze	6
III.	Ramowy rozkład materiału	7
IV.	Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów	8
	Klasa I	8
	Klasa II	20
	Klasa III	27
V.	Procedury osiągania celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów	32

Nota o autorach programu

Mgr **Marcin Kurczab** – nauczyciel matematyki warszawskiego liceum ogólnokształcącego; wśród jego uczniów są laureaci konkursów matematycznych dla szkół średnich; autor i redaktor merytoryczny publikacji matematycznych; współautor matematycznego cyklu podręczników i zbiorów zadań z zakresu 3-letniego gimnazjum oraz 4-letniego liceum ogólnokształcącego, a także 3-letniego liceum.

Mgr **Elżbieta Świda** – nauczycielka matematyki w warszawskich szkołach: najpierw w szkole podstawowej, a następnie w liceum ogólnokształcącym; wśród jej uczniów są laureaci i finaliści konkursów matematycznych dla uczniów szkół podstawowych; współautorka cyklu podręczników i zbiorów zadań dla 3-letniego gimnazjum oraz do 4-letniego liceum ogólnokształcącego, a także 3-letniego liceum.

Mgr **Elżbieta Kurczab** – nauczycielka matematyki w warszawskich szkołach ponadgimnazjalnych; współautorka i redaktorka materiałów pomocniczych dla nauczycieli matematyki, pracujących w liceach i w technikach; współautorka cyklu ćwiczeń i zbiorów zadań dla 3-letniego gimnazjum.

I. Wstęp

Wprowadzenie, od 2010 roku, obowiązku zdawania egzaminu maturalnego z matematyki spowodowało zmianę dwóch podstawowych aktów prawnych, mających wpływ na kształcenie matematyczne w polskich szkołach: podstawy programowej i standardów wymagań egzaminacyjnych. W dniu 23 sierpnia 2007 roku Minister Edukacji Narodowej podpisał rozporządzenie wprowadzające nową podstawę kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, w tym nową podstawę programową z matematyki. Zmiana standardów wymagań, będących podstawą przeprowadzania m.in. egzaminu maturalnego z matematyki od roku 2010, nastąpiła po podpisaniu przez Ministra Edukacji Narodowej rozporządzenia z dnia 28 sierpnia 2007 roku. Nasz *Program nauczania matematyki w liceach i technikach w zakresie podstawowym* jest zgodny z tymi dokumentami.

Realizacja naszego programu:

- ❖ umożliwia zdobycie wiadomości i umiejętności opisanych w podstawie programowej i w standardach wymagań egzaminacyjnych, w tym m.in.:
 - umiejętności budowania modeli matematycznych zjawisk z różnych dziedzin życia i ich stosowania;
 - umiejętności wykorzystywania podstawowych narzędzi i technik matematycznych;
 - umiejętności przeprowadzania prostego rozumowania dedukcyjnego;
 - umiejętności zdobywania i krytycznego analizowania informacji, formułowania hipotez oraz ich weryfikacji;
- ❖ daje matematyczne podstawy do uczenia się przedmiotów przyrodniczych, przede wszystkim fizyki, chemii, biologii;
- ❖ zapewnia dużą efektywność kształcenia; program ma charakter spiralny, zdecydowana większość nowych zagadnień pojawi się w trakcie realizacji programu co najmniej dwukrotnie;
- ❖ umożliwia powtórzenie najważniejszych zagadnień występujących w podstawie programowej z matematyki na niższych etapach kształcenia.

Szczegółowe treści kształcenia oraz odpowiadające im cele edukacyjne i osiągnięcia uczniów zostały oznaczone w następujący sposób.

Symbol:

- oznacza treści kształcenia i umiejętności zawarte w podstawie programowej z matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych lub w standardach wymagań egzaminacyjnych dla tych szkół oraz treści i umiejętności bezpośrednio z nimi związane;
- oznacza treści kształcenia i umiejętności zawarte w podstawie programowej z matematyki na niższych etapach kształcenia, a zatem takich, które podlegają sprawdzeniu również na egzaminie maturalnym;
- ◇ oznacza treści kształcenia i umiejętności, które nie występują w podstawie programowej ani w standardach wymagań egzaminacyjnych dla zakresu pod-

stawowego. Ich wprowadzenie było spowodowane tym, że ułatwiają zrozumienie zagadnień występujących w podstawie programowej (standardach wymagań egzaminacyjnych) lub są związane z zagadnieniami z podstawy programowej (standardów wymagań egzaminacyjnych), lub odgrywają istotną rolę w uczeniu się przedmiotów przyrodniczych. Decyzję o zakresie realizacji tych treści pozostawiamy nauczycielowi pracującemu z uczniami według naszego programu.

Na realizację programu w zakresie podstawowym – zgodnie z rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej w sprawie ramowych planów nauczania – przeznaczone jest 9 godzin tygodniowo – w ciągu 3 lat. Zatem na każdy rok nauki przypadają 3 godziny tygodniowo.

W naszym programie przedstawiamy ogólne cele edukacyjne i wychowawcze, ramowy rozkład materiału, szczegółowe treści kształcenia, wraz z zakresem przewidywanych osiągnięć ucznia. Dalej omawiamy procedury osiągania celów kształcenia oraz procedury oceniania osiągnięć uczniów. Do realizacji tego programu zalecamy podręczniki do liceum oraz zbiory zadań, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdry.

II. Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze

Matematyka to nauka rozwijająca się od czasów starożytności po czasy współczesne. Dostarcza narzędzi badań dla nauk przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych i społecznych. Nic więc dziwnego, że jest jednym z głównych składników wykształcenia współczesnego człowieka.

Matematyka stymuluje rozwój intelektualny młodego człowieka, pobudza jego aktywność umysłową, rozwija zdolności poznawcze, a także uczy dobrej organizacji pracy, wyrabia dociekliwość i krytycyzm.

Rola nauczyciela polega na pokazywaniu uczniom, że umiejętności matematyczne są niezbędne do funkcjonowania człowieka, zarówno w rodzinie (np. planowanie wydatków), jak i w społeczeństwie (np. orientacja w systemie podatkowym i budżecie państwa), czy w dziedzinie sztuki (np. kanon w rzeźbie i architekturze klasycznej).

Opracowany przez nas program ma służyć osiągnięciu następujących celów: w zakresie rozwoju intelektualnego ucznia (cele związane z kształceniem):

- rozwijaniu umiejętności zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji;
- opanowaniu umiejętności potrzebnych do oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia;
- wykształceniu umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowaniu metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych;
- rozwijaniu umiejętności czytania tekstu ze zrozumieniem;

- rozwinięciu wyobraźni przestrzennej;
- nabyciu umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej;
- rozwijaniu zdolności i zainteresowań matematycznych;
- rozwijaniu pamięci;
- rozwijaniu logicznego myślenia;
- nabyciu umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania;
- wykształceniu umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi;
- precyzyjnemu formułowaniu wypowiedzi;
- pobudzeniu aktywności umysłowej uczniów;

w zakresie kształtowania postaw (cele związane z wychowaniem):

- kształtowaniu wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych;
- wyrabianiu systematyczności w pracy;
- kształtowaniu pozytywnych postaw etycznych (piętnowanie nieuczciwości wyrażającej się w ściąganiu, podpowiadaniu itp.);
- nabyciu umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki;
- rozwijaniu umiejętności pracy w zespole;
- kształtowaniu postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych;
- kształtowaniu odpowiedzialności za powierzone zadania;
- kształtowaniu postawy dialogu i kultury dyskusji (komunikacja);
- dbaniu o estetykę (czytelny rysunek, jasne i przejrzyste rozwiązanie zadań itp.).

III. Ramowy rozkład materiału

Poniższe zestawienie przedstawia podział treści programowych na poszczególne klasy oraz orientacyjną liczbę godzin potrzebną na ich realizację.

Rok szkolny liczy ok. 37 tygodni. Zakładając, że w każdym tygodniu uczeń ma 3 godziny lekcji matematyki, otrzymujemy do dyspozycji ok. 111 godzin. Zdający maturę zakończą zajęcia z końcem kwietnia. Dla nich rok szkolny trwa zatem ok. 29 tygodni, co daje ok. 87 godzin lekcji matematyki.

Klasa I – 111 godzin [103 godz. + 8 godz. do dyspozycji nauczyciela]

1.	Elementy logiki matematycznej. Zbiory. Zbiory liczbowe	10
2.	Działania w zbiorach liczbowych	12
3.	Wyrażenia algebraiczne	14
4.	Geometria płaska – pojęcia wstępne	7
5.	Geometria płaska – trójkąty	10
6.	Trygonometria kąta ostrego	7

7.	Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta	8
8.	Funkcja i jej własności	12
9.	Przekształcanie wykresów funkcji	9
10.	Funkcja liniowa	14

Klasa II – 111 godzin [103 godz. + 8 godz. do dyspozycji nauczyciela]

1.	Geometria płaska – czworokąt	10
2.	Geometria płaska – pole czworokąta	10
3.	Funkcja kwadratowa	18
4.	Elementy geometrii analitycznej	12
5.	Wielomiany	18
6.	Funkcje wymierne	17
7.	Ciągi	18

Klasa III – 87 godzin [65 godz. + 22 godz. do dyspozycji nauczyciela]

1.	Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	16
2.	Elementy kombinatoryki	10
3.	Rachunek prawdopodobieństwa	12
4.	Elementy statystyki	9
5.	Geometria przestrzenna	18

IV. Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów

KLASA I

1. Elementy logiki. Zbiory. Zbiory liczbowe (10 godzin)

Tematyka

- ◇ Pojęcie zdania w logice, zaprzeczenie zdania.
- ◇ Koniunkcja zdań, alternatywa zdań.
- ◇ Implikacja, równoważność zdań.
- Definicja, twierdzenie, twierdzenie odwrotne.
- ◇ Prawa logiczne, prawa De Morgana.
- Zbiór, działania na zbiorach.
- Zbiory liczbowe, oś liczbowa.
- Przedziały.
- ◇ Forma zdaniowa jednej zmiennej.
- ◇ Kwantyfikator ogólny, kwantyfikator szczegółowy.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- ◇ pozna zdania proste i złożone;
- ◇ pozna spójniki logiczne;
- pozna, co to jest definicja i czym różni się od twierdzenia;
- dowie się, co to jest twierdzenie odwrotne;
- ◇ pozna podstawowe prawa logiki, takie jak negacja alternatywy i negacja koniunkcji;
- pozna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiór skończony (nieskończony), element zbioru, równość zbiorów, zbiory rozłączne, dopełnienie zbioru;
- zapozna się z symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów (\in , \subset , \cap , \cup , $-$, $'$);
- pozna pojęcie sumy, różnicy, iloczynu i dopełnienia zbiorów;
- przypomni sobie wiadomości dotyczące liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych;
- pozna relacje jakie zachodzą między podzbiarami zbioru liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie, czym jest oś liczbowa;
- pozna pojęcie przedziału (ograniczonego, nieograniczonego, otwartego, domkniętego, jednostronnie otwartego);
- nauczy się wykonywać działania na przedziałach (znajdować sumę, iloczyn, różnicę przedziałów, dopełnienie przedziału);
- ◇ pozna kwantyfikator ogólny i szczegółowy oraz nauczy się zaprzeczać zdania z kwantyfikatorem.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- ◇ odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi i ocenić jego wartość logiczną;
- posługiwać się spójnikami logicznymi i rozumie, że potoczne rozumienie spójników „i” oraz „lub” może być inne niż znaczenie spójników logicznych „ \wedge ”, „ \vee ”;
- ◇ zaprzeczać zdanie;
- ◇ budować zdania złożone i oceniać ich wartość logiczną;
- odróżnić definicję od twierdzenia;
- mając dane twierdzenie w postaci implikacji zbudować twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia;
- ◇ stosować poznane prawa logiczne;
- wyznaczać część wspólną, sumę i różnicę zbiorów oraz dopełnienie zbioru;
- wskazać w podanym zbiorze liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne;
- posługiwać się pojęciem osi liczbowej;
- zaznaczyć przedziały na osi liczbowej;
- wykonywać działania na przedziałach;
- ◇ odróżnić zadanie od formy zdaniowej;

- stosować określenia „dla każdego”, „dla pewnego”, „istnieje”, „dla dowolnego”;
- wykorzystywać język matematyki w komunikowaniu się.

2. Działania w zbiorach liczbowych (12 godzin)

Tematyka

- Zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych.
- Zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb niewymiernych.
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Porównywanie liczb w zbiorze \mathbf{R} . Przypomnienie wiadomości o równaniach i nierównościach.
- Procenty.
- Punkty procentowe.
- Wartość bezwzględna.
- Przybliżenia.
- Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia, szacowanie.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie pojęcie liczb pierwszych i złożonych;
- przypomni sobie cechy podzielności liczb naturalnych oraz jak znajduje się NWD i NWW liczb naturalnych;
- przypomni sobie, jak wykonuje się działania na ułamkach;
- ◇ pozna pojęcie części całkowitej i ułamkowej;
- przypomni sobie prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie własności równości i nierówności w zbiorze \mathbf{R} ;
- przypomni sobie pojęcie procentu i nauczy się sprawnie operować procentami;
- pozna pojęcie punktu procentowego;
- pozna pojęcie wartości bezwzględnej;
- pozna pojęcie błędu bezwzględnego i względnego;
- nauczy się szacować wyrażenia liczbowe.

Założone osiągnięcia ucznia:

Uczeń potrafi:

- stosować cechy podzielności liczb naturalnych do znajdowania NWW i NWD (w tym również w celu rozwiązania zagadnień praktycznych);
- sprawnie wykonywać działania na ułamkach;
- ◇ wyznaczyć część całkowitą i część ułamkową liczby;
- zaplanować i wykonać obliczenia na liczbach rzeczywistych (w tym z wykorzystaniem praw działań);

- stwierdzić, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną czy niewymierną;
- wyznaczać rozwinięcia dziesiętne liczb;
- zapisać liczbę wymierną (w tym mającą rozwinięcie dziesiętne okresowe) w postaci ilorazu liczb całkowitych;
- stosować własności równości i nierówności w zbiorze \mathbf{R} oraz rozwiązywać proste równania i nierówności;
- stosować pojęcie procentu w obliczeniach;
- odczytywać dane z tabel i diagramów;
- wykorzystywać tabele i diagramy do przedstawiania danych;
- posługiwać się pojęciem punktu procentowego;
- obliczyć wartość bezwzględną danej liczby;
- zastosować interpretację geometryczną wartości bezwzględnej;
- zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu $|x - a| = b$, $|x - a| \geq b$
- zapisać nierówność (równanie) z wartością bezwzględną, znając zbiór rozwiązań tej nierówności (tego równania);
- znaleźć przybliżenie liczby z zadaną dokładnością;
- stosować reguły zaokrąglania liczb;
- stosować pojęcie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia;
- oszacować wartość wyrażenia liczbowego.

3. Wyrażenia algebraiczne (14 godzin)

Tematyka

- Potęga o wykładniku naturalnym.
- Pierwiastek arytmetyczny.
- Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej.
- Wzory skróconego mnożenia.
- Potęga o wykładniku całkowitym.
- Potęga o wykładniku wymiernym.
- Informacja o potędze o wykładniku rzeczywistym.
- Pojęcie logarytmu, własności logarytmów.
- Przekształcanie wzorów.
- Średnia arytmetyczna, średnia geometryczna, średnia ważona.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym;
- przypomni sobie prawa działań na pierwiastkach arytmetycznych;
- pozna pojęcie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej;
- pozna wzory skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$
- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku całkowitym;

- pozna pojęcie potęgi o wykładniku wymiernym i własności działań na takich potęgach;
- pozna, jak konstruuje się potęgę o wykładniku niewymiernym;
- pozna prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- pozna pojęcie logarytmu;
- pozna podstawowe własności logarytmu (wzór na logarytm ilorazu, iloczynu, potęgi);
- ◇ pozna wzór na zamianę podstaw logarytmu;
- ◇ pozna przykładowe zastosowanie logarytmów;
- nauczy się przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- przypomni sobie pojęcie średniej arytmetycznej oraz pozna pojęcie średniej geometrycznej i średniej ważonej.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym i całkowitym;
- zapisywać liczby w postaci wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdzie $a \in \langle 1, 10 \rangle$ i $k \in \mathbb{C}$
- sprawnie wykonywać działania na pierwiastkach;
- sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia (w tym do rozkładania sum algebraicznych na czynniki);
- usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym (wymiernym i niewymiernym);
- obliczyć logarytm danej liczby przy danej podstawie;
- stosować w obliczeniach podstawowe własności logarytmu;
- ◇ znaleźć przybliżenie liczby zapisanej przy użyciu potęgi i przedstawić je (używając kalkulatora) w notacji wykładniczej;
- sprawnie przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- obliczać średnią arytmetyczną, geometryczną, ważoną.

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne (7 godzin)

Tematyka

- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt.
- ◇ Figura wypukła, figura ograniczona.
- Położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta.
- Dwie proste przecięte trzecią prostą.
- Twierdzenie Talesa.
- Okrąg i koło.
- Kąty i koła.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podstawowe pojęcia geometryczne (punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt);
- ◇ pozna pojęcie figury wklęsłej i wypukłej;
- ◇ pozna pojęcie figury ograniczonej i nieograniczonej;
- przypomni sobie wiadomości o kątach (kąt prosty, ostry, rozwarty, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe);
- przypomni sobie położenie prostych na płaszczyźnie, pojęcie odległości punktu od prostej i pojęcie odległości między prostymi równoległymi;
- przypomni sobie pojęcie symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta oraz jaką własność ma dowolny punkt leżący na symetralnej odcinka (dwusiecznej kąta);
- przypomni sobie twierdzenie o dwóch prostych równoległych, przeciętych trzecią prostą;
- przypomni sobie twierdzenie Talesa;
- przypomni sobie pojęcie koła i okręgu;
- pozna określenie kąta środkowego w kole, wpisanego w koło i kąta dopisanego oraz własności tych kątów.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określać własności poznanych figur geometrycznych i posługiwać się tymi własnościami;
- wyznaczać odległość: dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych;
- konstruować: proste prostopadłe, proste równoległe, symetralną odcinka, dwusieczną kąta;
- określić wzajemne położenie prostej i okręgu;
- ◇ określić wzajemne położenie dwóch okręgów;
- stosować w rozwiązywaniu zadań poznane twierdzenia (m.in. twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą, twierdzenie Talesa, twierdzenia dotyczące kątów środkowych, wpisanych w okrąg, dopisanych do okręgu).

5. Geometria płaska – trójkąty (10 godzin)

Tematyka

- Podział trójkątów.
- Suma kątów w trójkącie.
- Nierówność trójkąta.
- Odcinek łączący środki boków w trójkącie.
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Wysokości w trójkącie.

- Środkowe w trójkącie.
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie.
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt.
- Przystawanie trójkątów.
- Podobieństwo trójkątów.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podział trójkątów ze względu na boki i kąty;
- przypomni sobie twierdzenie o sumie kątów w trójkącie;
- przypomni sobie, na czym polega nierówność trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- pozna twierdzenie o wysokościach w trójkącie;
- pozna twierdzenie o środkowych w trójkącie;
- przypomni sobie twierdzenie o symetralnych boków trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie o dwusiecznych kątów trójkąta;
- przypomni sobie pojęcie trójkątów przystających oraz cechy przystawiania trójkątów;
- przypomni sobie pojęcie trójkątów podobnych oraz cechy podobieństwa trójkątów.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań (w tym m.in. twierdzenie o sumie kątów trójkąta, twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta, twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, twierdzenie o wysokościach w trójkącie, twierdzenie o środkowych w trójkącie);
- określić – znając długości boków trójkąta – czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny;
- opisać okrąg na trójkącie, wpisać okrąg w trójkąt, wyznaczać promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny i w trójkąt równoramienny, wyznaczać promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i na trójkącie równoramiennym – znając długości boków trójkąta;
- rozpoznawać trójkąty przystające;
- stosować cechy przystawiania trójkątów w rozwiązywaniu zadań;
- rozpoznawać trójkąty podobne;
- stosować cechy podobieństwa trójkątów w rozwiązywaniu zadań (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym).

6. Trygonometria kąta ostrego (7 godzin)

Tematyka

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym.
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla 30° , 45° , 60° .
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- nauczy się obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- pozna podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- rozwiązać równania typu $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, gdzie $0^\circ < x < 90^\circ$, korzystając z kalkulatora, tablic lub posługując się wartościami funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów;
- stosować podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego w rozwiązywaniu zadań;
- znając wartości jednej funkcji potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego.

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta (8 godzin)

Tematyka

- Pole figury geometrycznej.
- Pole trójkąta.
- Pola trójkątów podobnych.
- Pole koła, pole wycinka koła.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie pola figury;
- przypomni sobie stosowane wcześniej wzory na pole trójkąta
(np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$)
- pozna nowe wzory na pole trójkąta (np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$)

- pozna twierdzenie dotyczące pól trójkątów podobnych;
- przypomni sobie wzór na pole koła i długość okręgu;
- pozna wzór na pole wycinka koła i wzór na długość łuku okręgu.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczyć pole figury, wykorzystując podział tej figury na rozłączne części;
- stosować poznane wzory do obliczania pól trójkątów;
- stosować wzory na pole trójkąta do wyznaczania wielkości występujących w tych wzorach (np. długość wysokości, długość promienia koła wpisanego w trójkąt);
- zastosować twierdzenie o polach trójkątów podobnych w rozwiązywaniu zadań;
- zastosować wzór na pole koła i pole wycinka koła w rozwiązywaniu zadań.

8. Funkcja i jej własności (12 godzin)

Tematyka

- Pojęcie funkcji, funkcja liczbowa.
- Dziedzina i zbiór wartości funkcji.
- Sposoby opisywania funkcji.
- Wykres funkcji.
- Miejsce zerowe funkcji.
- Monotoniczność funkcji.
- ◇ Różnowartościowość funkcji.
- Najmniejsza i największa wartość funkcji.
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie pojęcie funkcji;
- pozna różne sposoby opisywania funkcji (graf, wzór, tabela, wykres, opis słowny);
- przypomni sobie takie pojęcia jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe funkcji liczbowej;
- pozna pojęcie monotoniczności funkcji;
- ◇ pozna pojęcie różnowartościowości funkcji;
- pozna wykresy niektórych funkcji jak np. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$
- pozna pojęcie najmniejszej i największej wartości funkcji.
- nauczy się odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- nauczy się szkicować wykres funkcji o podanych własnościach;

- nauczyć się opisywać, interpretować i przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru lub wykresu funkcji;

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić przyporządkowanie, które jest funkcją, od przyporządkowania, które funkcją nie jest;
- opisywać funkcje na różne sposoby (grafem, wzorem, tabelką, wykresem, opisem słownym);
- wskazać wykres funkcji liczbowej;
- wyznaczyć dziedzinę funkcji liczbowej;
- określić zbiór wartości funkcji (proste przykłady);
- obliczyć miejsca zerowe funkcji;
- określić na podstawie wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, wartość największą i najmniejszą funkcji, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie (maleje, jest stała) oraz zbiory, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne);
- ◇ określić na podstawie wykresu, czy dana funkcja jest różnowartościowa;
- sporządzić wykres funkcji spełniającej podane warunki;
- podać opis matematyczny zależności dwóch zmiennych w postaci funkcji;
- odczytywać i interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji, dotyczące różnych zjawisk, np. przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych, chemicznych;
- przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru funkcji lub wykresu funkcji.

9. Przekształcenia wykresów funkcji (9 godzin)

Tematyka

- ◇ Wektor w układzie współrzędnych.
 - Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX .
 - Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY .
- ◇ Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{w} = [p, q]$.
 - Symetria osiowa względem osi OX .
 - Symetria osiowa względem osi OY .
- ◇ Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- ◇ pozna pojęcie wektora w układzie współrzędnych;
- ◇ nauczyć się dodawać i odejmować wektory oraz mnożyć wektor przez liczbę;

- ◇ pozna pojęcie wektorów przeciwnych;
- ◇ pozna pojęcie przesunięcia równoległego;
- nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji wzdłuż osi OX ;
- nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji wzdłuż osi OY ;
- ◇ nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji o dowolny wektor;
- ◇ pozna pojęcie symetrii osiowej;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OX ;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OY ;
- ◇ pozna pojęcie symetrii środkowej;
- ◇ nauczy się przekształcać wykres funkcji względem początku układu współrzędnych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- ◇ obliczyć współrzędne wektora i długość wektora;
- ◇ dodać i odjąć wektory, pomnożyć wektor przez liczbę;
- ◇ stosować pojęcie wektorów równych i przeciwnych w rozwiązaniach prostych zadań;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x + a)$
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x) + b$
- ◇ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x + a) + b$
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = -f(x)$
- ◇ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = |f(x)|$
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(-x)$
- ◇ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = -f(-x)$

10. Funkcja liniowa (14 godzin)

Tematyka

- Proporcjonalność prosta.
- Funkcja liniowa. Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej.
- Własności funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.
- Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego.
- Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- ◇ Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- ◇ Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań i nierówności liniowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie informacje o proporcjonalności prostej;
- przypomni sobie pojęcie funkcji liniowej;
- pozna znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej;
- przypomni sobie własności funkcji liniowej;
- nauczy się znajdować równania funkcji liniowych, których wykresy są równoległe lub prostopadłe do danej funkcji liniowej;
- nauczy się stosować funkcję liniową do opisu zjawisk z życia codziennego;
- przypomni sobie, jak się rozwiązuje równania i nierówności liniowe;
- przypomni sobie metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- ◇ nauczy się opisywać zbiory za pomocą układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sporządzić wykres proporcjonalności prostej oraz podać jej własności;
- zastosować proporcjonalność prostą w rozwiązywaniu zadań;
- sporządzić wykres funkcji liniowej i odczytać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach;
- wykorzystać interpretację współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej w rozwiązywaniu zadań;
- wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy (prostopadły) do danej funkcji liniowej;
- stosować pojęcie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego;
- rozwiązywać równania oraz nierówności liniowe z jedną niewiadomą oraz interpretować je graficznie;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą;
- stosować poznane metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- ◇ graficznie przedstawiać nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi oraz opisywać podane zbiory za pomocą układów równań i nierówności z dwiema niewiadomymi.

KLASA II

1. Geometria płaska – czworokąty (10 godzin)

Tematyka

- Podział czworokątów.
- Trapezy.
- Równoległoboki.
- Trapezoidy.
- ◇ Okrąg opisany na czworokącie.
- ◇ Okrąg wpisany w czworokąt.
- Podobieństwo. Podobieństwo czworokątów.
- Skala i plan.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podział czworokątów;
- przypomni sobie niektóre własności czworokątów;
- pozna twierdzenie o linii łączącej środki ramion trapezu;
- ◇ pozna twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt;
- pozna pojęcie podobieństwa i jego własności;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące mapy, planu, skali mapy.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- posługiwać się własnościami czworokątów w rozwiązywaniu zadań;
- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań dotyczących wielokątów;
- stosować funkcje trygonometryczne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych;
- stosować własności podobieństwa w rozwiązywaniu zadań, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (np. dotyczących planu, mapy, skali).

2. Geometria płaska – pole czworokąta (10 godzin)

Tematyka

- Pole równoległoboku.
- Pole trapezu.
- Pola figur podobnych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie wzory na pola czworokątów (kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu);
- pozna nowe wzory na pole czworokąta;
- pozna twierdzenie dotyczące pól figur podobnych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- stosować poznane wzory do obliczania pól wielokątów;
- stosować twierdzenie dotyczące pól figur podobnych, w tym również umieszczonych w kontekście praktycznym (np. dotyczących planu, mapy, skali mapy);
- rozwiązywać zadania z zastosowaniem pól figur płaskich, również z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.

3. Funkcja kwadratowa (18 godzin)

Tematyka

- Jednomian kwadratowy, trójmian kwadratowy.
- Przekształcenia wykresów funkcji kwadratowych.
- Postać ogólna i postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej.
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- Badanie trójmianu kwadratowego, zadania optymalizacyjne.
- Równania kwadratowe.
- Nierówności kwadratowe.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję trójmianu kwadratowego i jego własności;
- nauczy się przedstawiać trójmian kwadratowy w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji kwadratowych;
- nauczy się przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- pozna metodę rozwiązywania równań kwadratowych;
- pozna metodę rozwiązywania nierówności kwadratowych;
- nauczy się znajdować największą oraz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- nauczy się korzystać z wykresu funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych;

- nauczyć się wykorzystywać własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań (w tym również umieszczonych w kontekście praktycznym).

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzorów innych funkcji;
- sporządzić wykres funkcji kwadratowej i zbadać jej własności na podstawie wykresu;
- wyznaczać współrzędne wierzchołka paraboli i postać kanoniczną funkcji kwadratowej;
- przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- wyznaczyć wzór ogólny funkcji kwadratowej o zadanych własnościach lub na podstawie jej wykresu;
- wyznaczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej i postać iloczynową funkcji kwadratowej;
- sprawnie zamieniać jedną postać funkcji kwadratowej na inną (postać kanoniczna, iloczynowa, ogólna);
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe oraz interpretować je graficznie, zapisywać rozwiązania odpowiednich nierówności w postaci sumy przedziałów;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- rozwiązywać zadania (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do badania funkcji kwadratowej (zadania optymalizacyjne);
- rozwiązywać układy równań prowadzące do równań kwadratowych;
- przeanalizować zjawiska z życia codziennego, opisane wzorem lub wykresem funkcji kwadratowej;
- opisać dane zjawisko za pomocą funkcji kwadratowej.

4. Elementy geometrii analitycznej (12 godzin)

Tematyka

- ◇ Wektor w układzie współrzędnych – powtórzenie wiadomości.
- Odległość punktów w układzie współrzędnych.
- Współrzędne środka odcinka.
- Równanie kierunkowe prostej.
- Równanie ogólne prostej.
- Równoległość prostych.
- Prostopadłość prostych.

- ◇ Odległość punktu od prostej.
- Równanie okręgu.

Cele edukacyjne ucznia

Uczeń:

- ◇ przypomni sobie podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych;
- przypomni sobie, jak oblicza się odległość punktów w układzie współrzędnych;
- pozna metodę wyznaczania współrzędnych środka odcinka;
- przypomni sobie informacje o równaniu kierunkowym prostej;
- nauczy się zapisywać równanie prostej w postaci ogólnej;
- przypomni sobie warunki na równoległość i prostopadłość prostych w układzie współrzędnych;
- ◇ pozna wzór na obliczanie odległości punktu od prostej;
- nauczy się przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej;
- nauczy się wyznaczać współrzędne środka i promień okręgu;
- nauczy się zapisywać równanie okręgu o zadanych własnościach (np. stycznego do jednej z osi układu);
- nauczy się wyznaczać współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu;
- ◇ nauczy się określać wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczyć odległość punktów w układzie współrzędnych;
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka;
- ◇ zastosować informacje o wektorze w układzie współrzędnych do rozwiązywania prostych zadań;
- znaleźć równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym;
- zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- ◇ stosować wzór na obliczanie odległości punktu od prostej w zadaniach;
- posługiwać się równaniem okręgu;
- przekształcić równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytać współrzędne środka i promień okręgu;
- wyznaczyć równanie okręgu o zadanych własnościach;
- wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu;
- ◇ określić wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami;
- ◇ wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów.

5. Wielomiany (18 godzin)

Tematyka

- Wielomian jednej zmiennej stopnia n ($n \geq 1$).
- Równość wielomianów.
- Dodawanie odejmowanie, mnożenie wielomianów.
- ◇ Dzielenie wielomianów.
- Pierwiastek wielomianu, pierwiastek wielokrotny.
- ◇ Twierdzenie Bezouta.
- Rozkład wielomianów na czynniki.
- Równania wielomianowe.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję wielomianu stopnia n ($n \geq 1$) jednej zmiennej;
- pozna twierdzenie o równości wielomianów i nauczy się je stosować;
- nauczy się dodawać, odejmować i mnożyć wielomiany;
- ◇ nauczy się dzielić wielomian przez wielomian;
- pozna pojęcie pierwiastka (w tym pierwiastka wielokrotnego) wielomianu;
- ◇ pozna twierdzenie Bezouta i nauczy się je stosować;
- ◇ pozna twierdzenie o reszcie i nauczy się je stosować;
- pozna metody rozkładania wielomianów na czynniki (wyłączanie czynnika poza nawias, stosowanie wzorów skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów);
- nauczy się rozwiązywać równania wielomianowe;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić wielomian od innej funkcji opisanej wzorem;
- dodać, odjąć i pomnożyć wielomiany;
- ◇ podzielić wielomiany;
- ◇ zastosować twierdzenie Bezouta i twierdzenie o reszcie w rozwiązaniach zadań;
- rozłożyć wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias;
- rozwiązać równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych;
- rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, stosując poznane definicje i twierdzenia.

6. Funkcje wymierne (17 godzin)

Tematyka

- Definicja funkcji wymiernej, dziedzin funkcji wymiernej.
- Działania na wyrażeniach wymiernych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie).
- Proporcjonalność odwrotna i jej własności.
- ◇ Funkcja homograficzna i jej własności.
- Proste równania wymierne.
- ◇ Proste nierówności wymierne.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję funkcji wymiernej;
- nauczy się obliczać wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej;
- nauczy się skracać i rozszerzać wyrażenia wymierne;
- nauczy się dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;
- nauczy się szkicować wykres proporcjonalności odwrotnej i określać własności tej funkcji;
- nauczy się rozwiązywać zadania umieszczone w kontekście praktycznym, związane z proporcjonalnością odwrotną;
- ◇ nauczy się rysować wykresy funkcji homograficznych;
- ◇ nauczy się opisywać własności funkcji homograficznej na podstawie jej wykresu;
- ◇ nauczy się rozwiązywać zadania z wykorzystaniem własności funkcji homograficznej;
- nauczy się rozwiązywać proste równania wymierne;
- ◇ nauczy się rozwiązywać proste nierówności wymierne (dające się sprowadzić do nierówności stopnia co najwyżej drugiego).

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić funkcję wymierną od innej funkcji;
- wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych lub kwadratowych za pomocą grupowania wyrazów, stosowania wzorów skróconego mnożenia, wyłączania wspólnego czynnika poza nawias;
- obliczać wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej;
- skracać i rozszerzać wyrażenia wymierne;

- dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- szkicować wykres proporcjonalności odwrotnej i określać własności tej funkcji;
- rozwiązywać zadania z proporcjonalnością odwrotną;
- ◇ rysować wykresy i określać własności funkcji homograficznych;
- ◇ rozwiązywać zadania dotyczące funkcji homograficznych;
- rozwiązywać proste równania wymierne;
- ◇ rozwiązywać proste nierówności wymierne prowadzące do nierówności liniowych lub nierówności kwadratowych;
- rozwiązywać zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do prostych równań wymiernych.

7. Ciągi (18 godzin)

Tematyka

- Określenie ciągu, ciąg liczbowy.
- Sposoby opisywania ciągów.
- Monotoniczność ciągu.
- Ciąg arytmetyczny.
- Ciąg geometryczny.
- Oprocentowanie lokat i kredytów (procent prosty i procent składany).

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję ciągu;
- pozna sposoby opisywania ciągów (wzór ogólny, wykres);
- pozna definicję ciągu monotonicznego i nauczy się badać monotoniczność ciągu;
- pozna definicję ciągu arytmetycznego;
- pozna własności ciągu arytmetycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu arytmetycznego (n -ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów tego ciągu, średnia arytmetyczna);
- pozna definicję ciągu geometrycznego;
- pozna własności ciągu geometrycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu geometrycznego (n -ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu, średnia geometryczna);
- pozna pojęcie procentu prostego i składanego;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące lokat i kredytów.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określać ciąg wzorem ogólnym;
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- narysować wykres ciągu i podać własności tego ciągu na podstawie wykresu;
- zbadać monotoniczność ciągu;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym;
- wyznaczyć ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem geometrycznym;
- wyznaczyć ciąg geometryczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania stosując wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym;
- stosować procent prosty i procent składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.

KLASA III

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna (16 godzin)

Tematyka

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie.
- Funkcja wykładnicza i jej własności.
 - ◇ Proste równania i nierówności wykładnicze.
- Zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym.
- Logarytm – powtórzenie wiadomości.
 - ◇ Funkcja logarytmiczna i jej własności.
 - ◇ Proste równania i nierówności logarytmiczne.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- będzie doskonalił umiejętności wykonywania działań na potęgach;
- pozna pojęcie funkcji wykładniczej;
- pozna własności funkcji wykładniczej;

- ◇ nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- nauczy się stosować własności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu zadań;
- przypomni sobie pojęcie logarytmu;
- przypomni sobie własności logarytmów i ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań;
- ◇ pozna pojęcie funkcji logarytmicznej;
- ◇ pozna własności funkcji logarytmicznej;
- ◇ nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności logarytmiczne;
- ◇ nauczy się stosować własności logarytmów w rozwiązywaniu zadań.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- stosować własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań;
- odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji;
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;
- opisywać własności funkcji wykładniczych na podstawie ich wykresów;
- ◇ rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- rozwiązywać zadania dotyczące funkcji wykładniczej, umieszczone w kontekście praktycznym;
- obliczać logarytm liczby dodatniej;
- stosować własności logarytmów w rozwiązywaniu zadań;
- ◇ odróżnić funkcję logarytmiczną od innych funkcji;
- ◇ sporządzać wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;
- ◇ przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych;
- ◇ opisywać własności funkcji logarytmicznych na podstawie ich wykresów;
- ◇ rozwiązywać proste równania i nierówności logarytmiczne;
- ◇ rozwiązywać zadania dotyczące funkcji logarytmicznych, umieszczone w kontekście praktycznym.

2. Elementy kombinatoryki (10 godzin)

Tematyka

- Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych.
- Zasada mnożenia.
- Drzewa stochastyczne.
- Symbol silni.
- ◇ Permutacje.
- ◇ Wariacje z powtórzeniami.
- ◇ Wariacje bez powtórzeń.
- ◇ Kombinacje.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- nauczy się zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- pozna zasadę mnożenia i nauczy się ją stosować;
- nauczy się przedstawiać pewne sytuacje kombinatoryczne na grafie w postaci drzewa i posługiwać się nimi w rozwiązywaniu zadań;
- pozna symbol silni i nauczy się go stosować;
- ◇ pozna pojęcie permutacji, wariacji z powtórzeniami i wariacji bez powtórzeń oraz kombinacji;
- ◇ nauczy się obliczać liczbę permutacji, wariacji z powtórzeniami, wariacji bez powtórzeń oraz kombinacji;
- nauczy się rozwiązywać zadania kombinatoryczne.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających używania wzorów kombinatorycznych;
- stosować zasadę mnożenia w rozwiązywaniu zadań;
- rozwiązywać pewne zadania kombinatoryczne, posługując się grafami w postaci drzewa;
- stosować symbol silni;
- ◇ obliczać liczbę permutacji, wariacji z powtórzeniami, wariacji bez powtórzeń i kombinacji;
- rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem kombinatoryki.

3. Rachunek prawdopodobieństwa (12 godzin)

Tematyka

- Doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, zdarzenie, działania na zdarzeniach.
- Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.
- Własności prawdopodobieństwa.
- „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa”.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna takie pojęcia, jak: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe;
- nauczy się określać zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, określać jego moc oraz określać zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu;

- nauczyć się znajdować sumę zdarzeń, różnicę zdarzeń, iloczyn zdarzeń oraz zdarzenie przeciwne do danego zdarzenia;
- poznać aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa;
- poznać własności prawdopodobieństwa i nauczyć się je stosować w rozwiązywaniu zadań;
- poznać „klasyczną definicję prawdopodobieństwa”;
- nauczyć się rozwiązywać zadania z zastosowaniem „klasycznej definicji prawdopodobieństwa”.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określić zbiór (skończony) zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i obliczyć jego moc;
- wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie „klasycznej definicji prawdopodobieństwa”;
- stosować własności prawdopodobieństwa w rozwiązywaniu zadań;
- wykorzystywać sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństwa;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych za pomocą grafu w postaci drzewa.

4. Elementy statystyki opisowej (9 godzin)

Tematyka

- Dane statystyczne i ich klasyfikacja.
- Średnia z próby.
- Mediana z próby.
- Odchylenie standardowe z próby.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- dowie się, na czym polega klasyfikacja danych statystycznych;
- nauczy się obliczać średnią z próby, medianę z próby i odchylenie standardowe z próby;
- nauczy się interpretować wymieniane wyżej parametry statystyczne.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę, odchylenie standardowe z próby;

- interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne;
- odczytywać i interpretować dane empiryczne z tabel, diagramów i wykresów;
- przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;
- przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
- porównywać i określać zależności między odczytanymi danymi.

5. Geometria przestrzenna (18 godzin)

Tematyka

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni.
- ◇ Rzut równoległy na płaszczyznę.
- Rzut prostokątny na płaszczyznę, kąt między prostą i płaszczyzną.
- Kąt dwuścienny, kąt liniowy kąta dwuściennego.
- ◇ Wielościany, pole powierzchni wielościanu, objętość wielościanu.
- Graniastosłupy – podział, pole powierzchni, objętość.
- Ostrosłupy – podział, pole powierzchni, objętość.
- Bryły obrotowe – walec, stożek, kula; pole powierzchni i objętość brył obrotowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- ◇ nauczy się rysować figury w rzucie równoległym na płaszczyznę;
- pozna wzajemne położenie prostej i płaszczyzny;
- nauczy się wyznaczać kąt między prostą a płaszczyzną;
- pozna pojęcie kąta dwuściennego oraz pojęcie kąta liniowego;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o graniastosłupach;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o ostrosłupach;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o bryłach obrotowych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- badać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- poprawnie narysować wielościany (graniastosłupy, ostrosłupy) i bryły obrotowe;
- wskazywać i obliczać kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami, takimi jak: krawędzie, przekątne, wysokości;
- podać własności figur przestrzennych, takich jak graniastosłupy, ostrosłupy czy bryły obrotowe;
- rysować siatki figur przestrzennych;

- wyznaczać pola i objętości wielościanów i brył obrotowych;
- wyznaczać związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii.

V. Procedury osiągania celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów

Nikogo nie trzeba przekonywać, że rozwijanie umiejętności matematycznych wpływa na rozwój intelektualny człowieka. Matematyka uczy logicznego myślenia i wnioskowania. Na lekcjach matematyki uczeń nabywa umiejętności precyzyjnego wysławiania się, co pomaga mu w komunikowaniu się z innymi.

Edukację w liceum rozpoczynamy od elementów logiki matematycznej. Realizacja tej tematyki pozwoli na zrozumienie budowy definicji i twierdzenia matematycznego (założenie, teza) oraz umożliwi kształcenie umiejętności logicznego wnioskowania. Umożliwi kształcenie precyzyjnego zapisu matematycznego, co wpłynie na kształtowanie umiejętności jasnego i precyzyjnego formułowania wypowiedzi.

Realizacja naszego programu w oparciu o przygotowane przez nas podręczniki i zbiory zadań umożliwi rozwiązywanie ciekawych problemów zarówno z algebry, jak i z geometrii. Zadania rozwiązywane na każdym etapie edukacji pozwolą na zdobycie umiejętności w zakresie: interpretowania tekstu matematycznego, używania prostych obiektów matematycznych, prostego modelowania matematycznego, stosowania strategii wynikającej z treści zadania, jak również prowadzenia prostych rozumowań, składających się z niewielkiej liczby kroków. Przykłady zaczerpnięte z życia codziennego pozwolą dostrzec uczniowi prawidłowości matematyczne w otaczającym go świecie i wpłyną na rozwijanie jego praktycznych umiejętności.

We współczesnym świecie niezbędna jest umiejętność posługiwania się różnymi tabelami, wykresami i diagramami. Kształtowanie tych umiejętności umożliwi realizacja naszego programu w każdym dziale matematyki, w szczególności przy omawianiu takiej tematyki jak zbiory, elementy statystyki, czy własności funkcji. Na tych lekcjach uczeń nabędzie umiejętność zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji. Opanuje umiejętność oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia. Lekcje rachunku prawdopodobieństwa ułatwią uczniowi dokonanie wyboru strategii w przypadkach doświadczeń losowych (np. gry losowe).

Nie mniej ważne jest kształtowanie postaw młodego pokolenia. Te cele należy kształtować na każdej lekcji matematyki. Trzeba wymagać od uczniów samodzielności w rozwiązywaniu problemów, piętnować nieuczciwość, wyrażającą się w podpowiadaniu czy w ściąganiu. Każdy uczeń powinien czuć się odpowiedzialny za powierzone mu zadania.

Na lekcjach matematyki mamy doskonałe warunki do tego, by uczyć kultury dyskusji. Bardzo często uczniowie przedstawiają różne metody rozwiązania tego

samego problemu, a naszym obowiązkiem jest wysłuchać wszystkich propozycji i wspólnie z zespołem podjąć decyzję, w jaki sposób dany problem ostatecznie rozwiązać. Zwracamy też uwagę na język matematyczny, precyzyjne formułowanie myśli, logiczną konstrukcję wypowiedzi. Kształcimy w ten sposób umiejętność komunikacji uczeń–nauczyciel, uczeń–uczeń.

Osiągnięcie założonych celów edukacyjnych i wychowawczych jest możliwe dzięki stosowaniu na lekcjach matematyki różnorodnych metod nauczania i odpowiedniego doboru form organizacyjnych lekcji. Ta różnorodność ma nie tylko uatrakcyjnić przedmiot, ale także zaktywizować uczniów w procesie uczenia się, zachęcić do rozwiązywania różnorodnych problemów, spowodować kształtowanie odpowiednich postaw.

1. Metody nauczania

Wśród najczęściej stosowanych metod pracy na uwagę zasługują:

a) Metoda podająca

- Wykład – w tej metodzie nauczania główną rolę odgrywa nauczyciel. Dobre przygotowanie merytoryczne prowadzącego zajęcia jest podstawą rzetelnego przekazania wiedzy uczniom. To on formułuje problem, analizuje go, wskazuje drogi i sposoby rozwiązania. Uczniowie sporządzają notatki, zapamiętują fakty, zdobywają wiedzę i umiejętności poprzez naśladownictwo. Ta metoda jest ważna z punktu widzenia dalszej nauki. Na uczelniach jest stosowana powszechnie, zatem uczeń powinien być przygotowany do korzystania z wykładu. W szkole średniej nie powinna być jednak stosowana zbyt często.

b) Metody aktywizujące uczniów

- Pogadanka, dyskusja – w tej metodzie nauczyciel kieruje rozmową, prowadzi dyskusję umiejętnie i porządkuje jej przebieg. Zadaje pytania, naprowadza na prawidłowe odpowiedzi, rozjaśnia wątpliwości, rozstrzyga spory. Uczniowie dyskutują, formułują spostrzeżenia, wymieniają się doświadczeniami, argumentują, spierają się, wyciągają wnioski.
- Metoda problemowa – w tej metodzie nauczyciel stawia przed uczniami pewien problem matematyczny (zadanie problemowe), który uczniowie rozwiązują samodzielnie. Uczniowie zmuszeni są dużego wysiłku intelektualnego. Analizują problem, formułują hipotezy, weryfikują je, w razie potrzeby wyjaśniają wątpliwości z nauczycielem, budują model rozwiązania problemu, dokonują korekt, podsumowują swoje spostrzeżenia i wnioski, sprawdzają obliczenia, formułują odpowiedź. Ta metoda kształci umiejętność rozwiązywania problemów, wzbogaca wiedzę uczniów i aktywizuje ich postawy w procesie kształcenia.

- Praca z tekstem matematycznym:
 - 1) *Praca z podręcznikiem* – polega na samodzielnym przeczytaniu fragmentu podręcznika, zapoznaniu się z definicjami i twierdzeniami oraz ze sposobami rozwiązywania zadań. Kształci umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstu matematycznego, analizowania definicji i twierdzeń oraz śledzeniu algorytmów rozwiązania niektórych zadań.
 - 2) *Praca z wykorzystaniem encyklopedii, słowników, czasopism popularnonaukowych, roczników statystycznych itp.* – przyzwyczajają uczniów do zbierania informacji z różnych źródeł, analizowania ich i przetwarzania, a także uświadomienia sobie, jaką rolę pełni matematyka w otaczającej ich rzeczywistości.
 - 3) *Praca z komputerem* – zbieranie informacji z internetu, dotyczących różnych zagadnień matematycznych, samodzielne przygotowanie referatów na podstawie zebranych informacji i przedstawienie ich, po odpowiednim opracowaniu, pozostałym uczniom. Metoda pozwala kształtować postawy poszukiwania i dociekliwości, daje szansę rozwoju i głębszego poznania matematyki oraz możliwość autoprezentacji.
- Rozwiązywanie ciągu zadań – metoda ta polega na rozwiązywaniu przez uczniów zestawu zadań (ze zbioru zadań, bądź przygotowanych przez nauczyciela). Ważne jest, aby zadania ułożone były w takiej kolejności, żeby rozwiązanie każdego następnego zadania pogłębiało wiedzę i umiejętności ucznia. Dobrze byłoby, aby wśród zadań pojawiły się też takie, które mają ciekawą nietypową treść lub zaskakujące rozwiązanie. Takiego rodzaju zadania i ćwiczenia w naturalny sposób pobudzają ciekawość i aktywność umysłową uczniów.

2. Formy pracy

Z wyborem metod nauczania ściśle wiąże się odpowiedni dobór form organizacyjnych lekcji. Wśród nich można wyróżnić następujące:

- **Praca z całą klasą** – polega na zaangażowaniu całej społeczności klasowej w rozwiązywanie problemów sformułowanych przez nauczyciela.
 - 1) Nauczyciel realizuje ze wszystkimi uczniami te same treści (np. uczniowie rozwiązują te same zadania, analizują ten sam problem matematyczny, dyskutują na ten sam temat, nauczyciel prowadzi wykład). Ta forma pracy sprzyja nawiązywaniu więzi uczniowskich.
 - 2) Wzajemne odpytywanie się (uczeń zadaje pytanie i wskazuje tego, który ma na nie odpowiedzieć; uczeń który odpowiedział na postawione pytanie zadaje swoje pytanie następnemu uczniowi itd.). Taka metoda pracy angażuje wszystkich uczniów. Pozwala na sprawne powtórzenie materiału. Uczniowie kształcą umiejętność porządkowania informacji, formułowania i zadawania pytań.

– **Praca w grupach** – polega na podziale klasy na kilkusobowe zespoły i przydzieleniu im problemu do rozwiązania. Taka forma pracy przebiega w różny sposób, w zależności od wyboru metody pracy, np.:

- 1) Każda grupa dostaje do rozwiązania zadanie lub zadania; wszyscy członkowie grupy uczestniczą w rozwiązywaniu problemu, dzieląc się własnymi spostrzeżeniami, umiejętnościami i wiedzą; nad pracą grupy pieczę sprawuje wcześniej wybrany lider grupy. Sprawozdawca grupy referuje rozwiązanie problemu przed całą klasą.
- 2) Metoda układanki „puzzle” – każdy członek grupy otrzymuje część informacji potrzebnej do wykonania zadania grupowego; poszczególni członkowie grupy są odpowiedzialni za przygotowanie swojej porcji informacji, przekazanie jej kolegom i przyswojenie informacji prezentowanych przez nich.
- 3) Metoda „drzewa decyzyjnego” – nauczyciel określa problem będący przedmiotem analizy; dzieli uczniów na grupy. Uczniowie wybierają różne możliwości rozwiązania zadania, wypisują zalety i wady każdej z metod rozwiązania, oceniają je z punktu widzenia wartości i celów, podejmują grupową decyzję o wyborze metody rozwiązania problemu.

Praca w grupach uczy organizacji pracy, podziału obowiązków pomiędzy członków grupy, odpowiedzialności za powierzone zadania. Uczy komunikacji między członkami grupy, zasad współpracy partnerskiej. Ma ogromne walory kształcące i wychowawcze.

– **Praca indywidualna** – każdy uczeń pracuje samodzielnie, pod kierunkiem nauczyciela (jeśli praca odbywa się na lekcji) lub samodzielnie (jeśli praca odbywa się w domu). Praca indywidualna pozwala uczniowi na samodzielne poszukiwanie odpowiedzi na postawione pytania, zmusza do własnych przemyśleń, zastanowienia się nad problemem i sposobem jego rozwiązania, utrwaleniem już zdobytej wiedzy, a także nad kształceniem umiejętności uczenia się. Uczeń pracuje we właściwym dla siebie tempie. Praca indywidualna wyrabia też nawyk porządnego wykonania powierzonego zadania, odpowiedzialności za siebie, za swoją wiedzę i umiejętności.

3. Metody kontroli i oceny

Kontrolowanie i ocenianie uczniów powinno być spójne z tym, co było przedmiotem nauczania. Przedmiotem oceny nie może być relacja między wiedzą ucznia i nauczyciela, lecz postęp ucznia w procesie kształcenia. Głównymi obszarami oceniania powinny być: wiedza zdobyta przez ucznia, umiejętności pozwalające uczniowi na gromadzenie i pogłębianie wiedzy, umiejętności społeczne i komunikacyjne, a także postawa młodego człowieka, wyrażająca się w dążeniu do samorealizacji. Najłatwiej ocenić wiedzę, jaką posiada uczeń, trudniej – pozostałe obszary. Aby móc to uczynić, należy stosować aktywne metody nauczania. Tak ważną umiejętność jak komunikacja, która wyraża się w wypowiedaniu,

wiedzi ustnej. Każda grupa ma sekretarza, który na koniec zajęć przedstawia w pisemnej formie efekty pracy grupy, nauczyciel sprawdza i ocenia pracę pisemną. Następnie wybiera z każdej grupy jedną osobę, która na tablicy rozwiązuje zadanie wskazane przez nauczyciela. Odpowiedź ucznia podlega ocenie. Każdy członek danej grupy otrzymuje ocenę, która jest średnią ocen z pracy pisemnej i odpowiedzi ustnej ucznia danej grupy. Taki system oceny pracy grupowej powoduje, że wszyscy członkowie grupy czują się współodpowiedzialni za powierzone zadanie. Chętnie pomagają sobie nawzajem, wyjaśniają wątpliwości. Chcą, aby każdy uczeń z grupy był gotowy do prezentacji problemu.

4. Środki dydaktyczne

- a) Wykonywanie siatek i modeli figur przestrzennych – w ten sposób rozwijana jest wyobraźnia przestrzenna uczniów.
- b) Wykorzystanie telewizji edukacyjnej, filmów edukacyjnych, komputerów – jest elementem edukacji medialnej; daje możliwość prezentowania różnych modeli matematycznych; zwiększa atrakcyjność prezentowanego materiału.
- c) Analizowanie informacji z prasy, np.: danych giełdowych, kursu walut, zmian cen różnych towarów na rynku itp.
- d) Wykorzystanie środków mnemotechnicznych.

Osiąganie zamierzonych celów kształcenia może odbywać się również przez uczestnictwo uczniów w kołach matematycznych, kołach interdyscyplinarnych, a także w konkursach matematycznych i w olimpiadzie matematycznej.