

## Sprawdzian nr 5

## WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

1. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

Funkcja o wzorze:

- a)  $f(x) = 0,5$  jest funkcją liniową;  
 b)  $g(x) = x^2 - \sqrt{x} + 3$  jest funkcją kwadratową;  
 c)  $h(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x^5 + 1}$  jest funkcją wymierną.

2. Wykresem funkcji:

- a)  $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$  jest hiperbola;  
 b)  $g(x) = 5 - 2x$  jest prosta;  
 c)  $h(x) = 2 - 4x + 5x^2$  jest parabola.

Wskaż poprawną odpowiedź.

3. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

Funkcja o wzorze:

- a)  $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 5)$  ma trzy miejsca zerowe;  
 b)  $g(x) = 1 - x + 4x^2$  nie ma miejsc zerowych;  
 c)  $h(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$  ma dwa miejsca zerowe.

4. Dane są dwa punkty  $X(2, 3)$  oraz  $Y(4, -7)$ , należące do wykresu  $W_f$  pewnej funkcji liniowej  $f$ . Jeśli  $P(x, y) \in W_f$ , to  $\overrightarrow{XP} = a \cdot \overrightarrow{XY}$  dla  $a \in \mathbf{R}$ , czyli  $[x - 2, y - 3] = [2a, -10a]$ . Na podstawie równości wektorów otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - 2 = 2a \\ y - 3 = -10a \end{cases} \text{ z niewiadomymi } x, y \text{ i parametrem } a.$$

Stąd  $y = -5x + 13$ , więc  $f(x) = -5x + 13$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, wyznacz wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty o współrzędnych  $A(4, -4)$ ,  $B(10, -1)$ .

5. Grupa kolarzy znajduje się w odległości 140 km od mety, do której zbliża się ze stałą prędkością  $35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Odległość  $d$  kolarzy od mety [km] w zależności od czasu jazdy  $t$  [h] opisuje wzór:

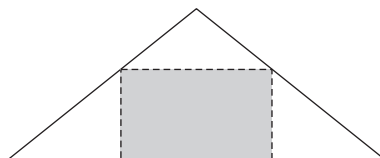
- a)  $d(t) = 140 + 35t$ ,  $t \in \langle 0; 4 \rangle$ ;  
 b)  $d(t) = 35t - 140$ ,  $t \in \langle 0; 4 \rangle$ ;  
 c)  $d(t) = 140 - 35t$ ,  $t \in \langle 0; 4 \rangle$ .

Wskaż prawidłowy wzór.

- 6.** Firma chce kupić 20 fartuchów roboczych za kwotę nie większą niż 2500 złotych. Zamierza kupić fartuchy nylonowe w cenie 38 zł oraz brezentowe w cenie 150 zł. Jaka największą liczbę fartuchów brezentowych może kupić ta firma?
- 7.** W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest trapez prostokątny  $ABCD$ , o którym wiadomo, że:  $AB \parallel DC$ , bok  $AD$  zawiera się w prostej o równaniu  $x + 3y + 7 = 0$ ,  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ ,  $B(2, 2)$  oraz  $C(3, 0)$ . Opisz tę figurę odpowiednim układem nierówności.
- 8.** Dana jest funkcja o wzorze  $f(x) = 4x - x^2$ . Funkcja przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy,
- a)  $x \in (0, 4)$ ;                      b)  $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ ;                      c)  $x \in (-\infty, 4)$ .

Wskaż poprawną odpowiedź.

- 9.** Z kawałka płótna w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie 2 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 1 m, hafciarka chce wyciąć prostokątną serwetę o największym polu powierzchni.



Jakie wymiary powinna mieć ta serweta?

- 10.** Tabela pokazuje częściowe wyniki obserwacji dotyczącej związku między liczbą osób zwiedzających muzeum a porą dnia. Muzeum otwarte jest w godzinach:  $9^{00} - 19^{00}$ .

pora dnia	$10^{00}$	$12^{00}$		$18^{00}$
liczba osób zwiedzających muzeum	58		40	10

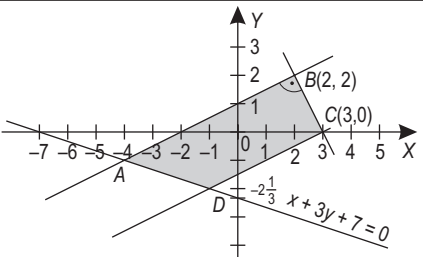
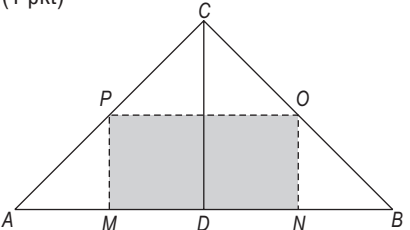
Przyjmując, że funkcja  $f(x) = -1,5x^2 + bx + c$ , gdzie  $x$  – oznacza porę dnia wyrażoną w godzinach, dobrze opisuje ten związek

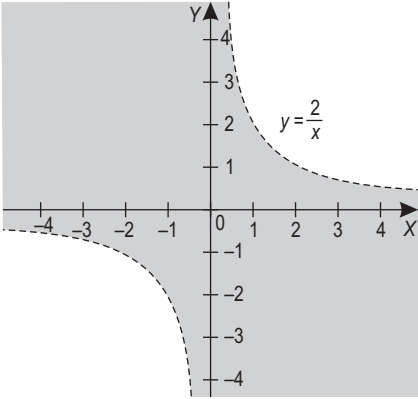
- a) wyznacz współczynniki  $b$  oraz  $c$ ;  
 b) uzupełnij tabelę.
- 11.** Kierowca ustalił, że drogę długości 208 km może przejechać z pewną stałą prędkością  $V \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ , w czasie  $t$  [h]. Gdyby zaś jechał z prędkością o  $13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  większą, wówczas trasę tę pokonałby w czasie 0,8 h krótszym. Oblicz, jaką prędkość ustalił kierowca.

- 12.** Liczba  $-7$  jest miejscem zerowym wielomianu  $W(x)$ . Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian  $P(x) = x^2 + 5x - 14$ , jeśli wiadomo, że w wyniku dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - 2)$  otrzymujemy resztę 18.
- 13.** Wiadomo, że dla różnych od zera liczb  $a$  i  $b$  zachodzi związek  $\frac{10a + 5b}{2a} = 6$ . Wyznacz wartość wyrażenia  $\frac{4a - 3b}{7b}$ .
- 14.** Sprawdź, czy zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{x-3}{x+2} > 1$  zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności  $x^3 - 4x + 2x^2 - 8 \leq 0$ .
- 15.** W prostokątnym układzie współrzędnych wyznacz zbiór:  
 $A = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R} \text{ i } xy < 2\}$

Tabela odpowiedzi.

Numer zadania	Odpowiedź	Liczba punktów za poprawną odpowiedź	Liczba punktów uzyskanych (wpisuje uczeń)
1.	a), c)	2	
2.	a), b), c)	2	
3.	a), c)	3	
4.	$f(x) = 0,5x - 6, x \in \mathbf{R}$	4	
5.	c)	2	
6.	15 <ul style="list-style-type: none"> <li>wprowadzenie oznaczeń i zapisanie układu warunków (1 pkt)  <math>x</math> – liczba fartuchów nylonowych <math>x \in \mathbf{N} \wedge x \leq 20</math>  <math>y</math> – liczba fartuchów brezentowych <math>y \in \mathbf{N} \wedge y \leq 20</math>  <math>\begin{cases} x + y = 20 \\ 38x + 150y \leq 2500 \end{cases}</math></li> <li>ograniczenie liczby fartuchów brezentowych warunkami zadania: <math>0 \leq y \leq 15\frac{15}{28} \wedge y \in \mathbf{N}</math> (1 pkt)</li> <li>sformułowanie poprawnej odpowiedzi (1 pkt)</li> </ul>	3	
7.	$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3} \\ y \geq \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \leq -2x + 6 \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>sporządzenie rysunku pomocniczego wraz z oznaczeniami (1 pkt)</li> </ul>	5	

	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• równanie prostej <math>BC</math> przechodzącej przez punkty <math>B(2, 2)</math> i <math>C(3, 0)</math>: <math>y = -2x + 6</math> (0,5 pkt)</li> <li>• równanie prostej <math>AB</math> prostopadłej do prostej <math>BC</math> i przechodzącej przez punkt <math>B(2, 2)</math>: <math>y = \frac{1}{2}x + 1</math> (0,5 pkt)</li> <li>• równanie prostej <math>DC</math> równoległej do prostej <math>AB</math> i przechodzącej przez punkt <math>C(3, 0)</math>: <math>y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}</math> (0,5 pkt)</li> <li>• przedstawienie równania prostej <math>AD</math> w postaci kierunkowej: <math>y = -\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}</math> (0,5 pkt)</li> <li>• poprawne zapisanie układu nierówności (2 pkt)</li> </ul>		
8.	a)	3	
9.	<p><math>0,5 \text{ m} \times 1 \text{ m}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• wykonanie rysunku pomocniczego wraz z oznaczeniami (1 pkt)</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> CD  = 1 \text{ m}</math>, <math> AB  = 2 \text{ m}</math>, <math> MM  =  PO  = y</math>, <math>y \in (0, 2)</math>, <math> PM  =  ON  = x</math>, <math>x \in (0, 1)</math></li> <li>• znalezienie związku między zmiennymi <math>x</math> oraz <math>y</math> na podstawie podobieństwa trójkątów <math>AMP</math> i <math>ADC</math> (1 pkt)  <math>\frac{ CD }{ PM } = \frac{ AD }{ AM }</math> czyli <math>\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}y}</math> skąd <math>y = 2 - 2x</math></li> <li>• ustalenie wzoru funkcji pola prostokąta <math>MNOP</math> w zależności od długości <math>x</math> jednego z boków i dziedziny tej funkcji (1 pkt)  <math>P(x) = -2x^2 + 2x</math>, <math>x \in (0, 1)</math></li> <li>• wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga największą wartość oraz znalezienie wymiarów serwety o największym polu powierzchni (1 pkt)</li> </ul>	4	
10.	<p>a) <math>b = 36</math>, <math>c = -152</math>; (2 pkt)</p> <p>b) <math>12^{00} - 64</math>; <math>16^{00} - 40</math> (2 pkt)</p>	4	

11.	$52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• ułożenie układu równań <math>\begin{cases} (V+13)(t-0,8) = 208 \\ V \cdot t = 208 \end{cases}</math> (1 pkt)</li> <li>• sprowadzenie układu równań do równania kwadratowego <math>0,8V^2 + 10,4V - 2704 = 0</math> (1 pkt)</li> <li>• rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi (2 pkt)</li> </ul>	4	
12.	$R(x) = 2x + 14$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• zapisanie warunków zadania (3 pkt)</li> </ul> $\begin{cases} W(x) = Q(x) \cdot (x^2 + 5x - 14) + ax + b, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R} - \text{na podstawie} \\ \text{twierdzenia o dzieleniu wielomianów} \\ W(-7) = 0 - \text{na podstawie definicji miejsca zerowego} \\ W(2) = 18 - \text{na podstawie twierdzenia o reszcie} \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązanie układu równań <math>\begin{cases} -7a + b = 0 \\ 2a + b = 18 \end{cases}</math></li> </ul> i sformułowanie odpowiedzi (2 pkt)	5	
13.	1 Wskazówka: Wyznacz zmienną $b$ z równania $\frac{10a+5b}{2a} = 6$ i wstaw do wyrażenia $\frac{4a-3b}{7b}$ .	3	
14.	Tak <ul style="list-style-type: none"> <li>• wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności <math>x^3 - 4x + 2x^2 - 8 \leq 0; x \in (-\infty, 2)</math> (1 pkt)</li> <li>• wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności <math>\frac{x-3}{x+2} &gt; 1 \wedge x \in \mathbf{R} - \{-2\}; x \in (-\infty, 2)</math> (1 pkt)</li> <li>• sformułowanie odpowiedzi (1 pkt)</li> </ul>	3	
15.		3	
		Razem 50	Razem .....

Jeśli nie jesteś usatysfakcjonowany wynikiem, to ponownie skorzystaj z literatury i przystąp do drugiego sprawdzianu.

## Sprawdzian nr 5

## WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

- 1.** Dana jest funkcja liniowa z parametrem  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) o wzorze  $f(x) = (|m - 1| - 3)x + m^2 - 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Wskaż zdania prawdziwe.
- Dla  $m = -1$  funkcja jest malejąca i nieparzysta.
  - Dla  $m \in \left\{-2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right\}$  wykres funkcji  $f$  jest prostopadły do prostej o równaniu  $2x + y - 1 = 0$ .
  - Istnieje taka wartość parametru  $m$ , dla której funkcja  $f$  jest okresowa.
- 2.** Dana jest funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - p)^2 - 2p$ , gdzie  $p \in \mathbf{R}$ . Wówczas:
- Funkcja  $f$  osiąga największą wartość równą  $4p$ .
  - Funkcja  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe dla każdego  $p < 0$ .
  - Wierzchołek paraboli należy do prostej o równaniu  $y = -2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  dla każdej wartości parametru  $p$ .
- Wskaż zdania prawdziwe.
- 3.** Niech  $W(x)$  będzie dowolnym wielomianem podzielnym przez  $(x - 2)$  takim, że  $W(x) = W(-x)$ , dla każdego  $x \in \mathbf{R}$ . Czy można wnioskować, że:
- Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $x^2 - 4$ ?
  - Liczba 0 jest pierwiastkiem wielomianu?
  - Wykres wielomianu jest symetryczny względem osi  $OY$ ?
- 4.** Wielomiany  $W(x) = x^2 + 4x - 6a$  i  $F(x) = x^2 - 2x + 3b$  mają wspólny pierwiastek  $x_0$ . Zatem:
- $x_0 = a + \frac{1}{2}b$  i  $a < -1$  i  $b \leq \frac{1}{3}$ ;
  - $x_0 = \frac{\sqrt{ab}}{2}$  i  $a \geq -\frac{2}{3}$  i  $b \leq \frac{1}{3}$ ;
  - $x_0 = \frac{2a + b}{2}$  i  $a \geq -\frac{2}{3}$  i  $b \leq \frac{1}{3}$ .
- Wskaż poprawną odpowiedź.
- 5.** Figura będąca zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają nierówność  $|x - 1| + |y| \leq 4$ :
- jest prostokątem;

- b) ma środek symetrii w punkcie  $(1, 0)$ ;  
 c) zawiera się w zbiorze  $A = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 + y^2 - 2x - 15 \leq 0\}$ .  
 Wskaż zdania prawdziwe.

6. Rozłóż wielomian  $W(x) = 5x^4 + 20$  na czynniki możliwie najniższego stopnia.
7. Dane jest równanie  $mx^3 - (m+1)x^2 + 4mx = 0$  z parametrem  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ). Zbadaj liczbę rozwiązań równania ze względu na wartości parametru. Napisz wzór i narysuj wykres funkcji  $y = g(m)$ , która każdej wartości parametru  $m$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.
- UWAGA:** Rozwiązania równania o tej samej wartości liczbowej traktujemy jako jedno rozwiązanie.
8. Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  wielomian  $W(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 + ax - 30$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + bx - 15$ ?
9. Jubiler ma dwa stopy srebra ze złotem. W pierwszym stopie stosunek masy srebra do masy złota wynosi  $3 : 5$ , zaś w drugim srebro stanowi 30% masy stopu. Złotnik chce otrzymać 1,2 kg nowego stopu, w którym stosunek masy srebra do masy złota będzie wynosił  $5 : 11$ . Ile kilogramów każdego z tych stopów powinien wziąć?
10. Koszt wyprodukowania bransoletki srebrnej wynosi 12 zł. Poniższa tabela podaje oczekiwaną miesięczną wielkość sprzedaży  $y$  w zależności od ceny  $x$  za jedną sztukę.

$x$	17	20	25	32	48
$y$	775	700	575	400	0

- a) Napisz wzór funkcji liniowej, opisującej zależność pomiędzy wielkością sprzedaży a ceną bransoletki, przyjmując za minimalną ceną koszt wyprodukowania jednej sztuki.
- b) Wiedząc, że dochód to różnica między przychodem a kosztami produkcji, napisz wzór funkcji kwadratowej opisującej dochód w zależności od ceny bransoletki.
- c) Oblicz, jaką cenę bransoletki należy ustalić, aby uzyskać jak największy dochód.
- d) Oblicz, ile wynosi największy dochód i jaka odpowiada mu wielkość sprzedaży.
- e) Oblicz miesięczny maksymalny zysk rzemieślnika, wiedząc, że od dochodu musi odprowadzić podatek w wysokości 30%.
11. Funkcja  $F(x) = \frac{3x^3 + ax^2 - 12x - 4a}{2x - 4}$  ma miejsce zerowe równe  $-1$ . Wyznacz:
- a) pozostałe miejsca zerowe tej funkcji,  
 b) zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji są dodatnie.

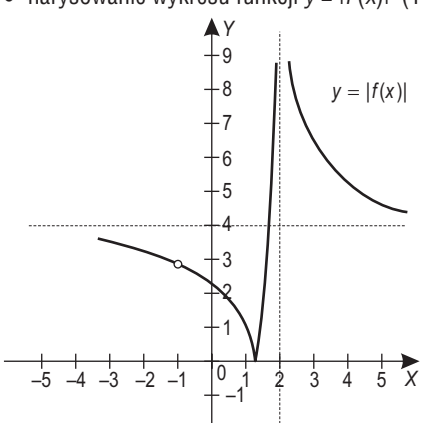
- 12.** Z prostokątnego kawałka miedzianej blachy o wymiarach  $0,5 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$  należy wyciąć w rogach jednakowe kwadraty tak, aby po złożeniu blachy i zlutowaniu odpowiednich krawędzi otrzymać prostopadłościenny pojemnik. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć, aby objętość pojemnika była równa 6 litrów, a odpady były jak najmniejsze?
- 13.** Dla jakich wartości parametru  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) nierówność  $\frac{mx^2 + (m+2)x + m}{x^2 + 1} > 1$  jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$ ?
- 14.** Z podanego równania  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{y-3} = 1$  wyznacz  $y$  jako funkcję  $f$  zmiennej  $x$  i narysuj wykres funkcji  $y = |f(x)|$ .
- 15.** Wykaż, że nierówność  $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 48x + 36 \geq 0$  jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

Tabela odpowiedzi

Numer zadania	Odpowiedź	Liczba punktów za poprawną odpowiedź	Liczba punktów uzyskanych (wpisuje uczeń)
1.	a), b), c) Wskazówka. ad c) Funkcja liniowa jest okresowa, gdy jest funkcją stałą	2	
2.	b), c) Wskazówka. ad a) Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(p, -2p)$ , więc funkcja osiąga największą wartość równą $-2p$ . ad b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - p)^2 = -4p$ . Równanie ma dwa różne rozwiązania tylko wtedy, gdy $-4p > 0$ , czyli $p < 0$ . ad c) Współrzędne punktu $(p, -2p)$ spełniają równanie prostej $y = -2x$ , dla każdej wartości parametru $p$ .	2	
3.	a) tak, b) nie, c) tak Wskazówka. ad a) Wielomian $W(x)$ jest funkcją parzystą i ma miejsce zerowe 2, więc jego miejscem zerowym jest również liczba $-2$ . Zatem wielomian ten jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przez dwumian $(x + 2)$ , czyli przez wielomian $x^2 - 4$ .	2	

	<p>ad b) Wielomian <math>W(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)</math> spełnia założenia, ale <math>W(0) = 4</math>, czyli liczba 0 nie jest jego pierwiastkiem.</p> <p>ad c) Wielomian <math>W(x)</math> jest funkcją parzystą, więc jego wykres jest symetryczny względem osi <math>OY</math>.</p>		
4.	<p>c) Wskazówka. Wielomiany <math>W(x)</math> i <math>F(x)</math> mają wspólny pierwiastek, gdy spełnione są następujące warunki:</p> $\begin{cases} 16 + 24a \geq 0 \\ 4 - 12b \geq 0 \\ W(x_0) = 0 \\ F(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{2}{3} \\ b \leq \frac{1}{3} \\ W(x_0) = F(x_0) \end{cases}$	2	
5.	<p>a), b), c) Wskazówka. Wyznacz wszystkie punkty płaszczyzny, których współrzędne spełniają alternatywę warunków:</p> $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq - x - 1  + 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y < 0 \\ y \geq  x - 1  - 4 \end{cases}$ <p>Szukaną figurą jest kwadrat <math>ABCD</math>, gdzie <math>A(1, -4)</math>, <math>B(5, 0)</math>, <math>C(1, 4)</math>, <math>D(-3, 0)</math>.</p>	2	
6.	<p><math>W(x) = 5(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)</math> Wskazówka. Zauważ, że <math>W(x) = 5(x^4 + 4) = 5 \cdot [(x^2 + 2)^2 - 4x^2]</math>.</p>	3	
7.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• doprowadzenie równania do postaci <math>* x = 0 \vee ** mx^2 - (m + 1)x + 4m = 0</math> i wyznaczenie wartości parametru <math>m</math>, dla którego równanie <math>(**)</math> ma pierwiastek równy 0 (<math>m = 0</math>) (1 pkt)</li> <li>• przeprowadzenie dyskusji liczby rozwiązań równania <math>(**)</math> ze względu na parametr <math>m \in \mathbf{R} - \{0\}</math> (1 pkt)</li> <li>• ustalenie liczby rozwiązań równania wyjściowego oraz wzoru funkcji <math>y = g(m)</math> (2 pkt)</li> <li>• narysowanie wykresu funkcji <math>y = g(m)</math> (1 pkt)</li> </ul> $g(m) = \begin{cases} 1 \text{ dla } m \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \\ 2 \text{ dla } m \in \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\} \\ 3 \text{ dla } m \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) - \{0\} \end{cases}$	5	

8.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wykonanie dzielenia wielomianu <math>W(x)</math> przez wielomian <math>P(x)</math>; iloraz <math>Q(x) = x^2 + (2 - b)x + b^2 - 2b + 2</math>, reszta <math>R(x) = (-b^3 + 2b^2 - 17b + a + 30)x + 15b^2 - 30b</math> (1 pkt)</li> <li>obliczenie wartości parametrów <math>a</math> i <math>b</math> na podstawie faktu, że <math>R(x)</math> jest wielomianem zerowym (2 pkt)</li> </ul> $\begin{cases} a = -30 \\ b = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$	3	
9.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wprowadzenie oznaczeń, przeprowadzenie analizy treści, ułożenie układu równań (2 pkt)</li> </ul> $\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{3}{10}y = 5 \\ \frac{5}{8}x + \frac{7}{10}y = 11, \\ x + y = 1,2 \end{cases}$ <p>gdzie: <math>x</math> – masa pierwszego stopu [kg], <math>y</math> – masa drugiego stopu [kg], <math>x, y \in \mathbf{R}_+</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi: Należy wziąć 0,2 kg pierwszego stopu i 1 kg drugiego stopu (1 pkt)</li> </ul>	3	
10.	<p>a) <math>f(x) = 1200 - 25x</math>, <math>x \in \langle 12, 48 \rangle</math> (1 pkt)</p> <p>b) <math>d(x) = -25x^2 + 1500x - 14400</math>, <math>x \in \langle 12, 48 \rangle</math> (1 pkt)</p> <p>c) 30 zł (1 pkt)</p> <p>d) największy dochód 8100 zł, wielkość sprzedaży 450 sztuk (1 pkt)</p> <p>e) 5670 zł (1 pkt)</p>	5	
11.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznaczenie dziedziny funkcji (<math>D_f = \mathbf{R} - \{2\}</math>) (1 pkt)</li> <li>obliczenie wartości parametru (<math>a = 3</math>) (1 pkt)</li> <li>wyznaczenie pozostałych miejsc zerowych (<math>x = -2</math>) (1 pkt)</li> <li>wyznaczenie tych argumentów <math>x</math>, dla których wartości funkcji są dodatnie (<math>x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)</math>) (1 pkt)</li> </ul>	4	

12.	<p>5 cm <math>\times</math> 5 cm</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ustalenie wzoru na objętość pudełka w zależności od długości boku wyciętego kwadratu i ustalenie dziedziny (<math>V(x) = 4x^3 - 18x^2 + 20x</math>, <math>x \in (0, 2)</math>, <math>x</math> – długość boku kwadratu w decymetrach) (2 pkt)</li> <li>rozwiązanie równania  <math>2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0</math>, gdzie <math>x \in (0, 2)</math>  <math>(x = 0,5 \vee x = 1)</math> (1 pkt)</li> <li>podanie prawidłowej odpowiedzi. Należy wyciąć kwadraty o boku długości 0,5 dm (1 pkt)</li> </ul>	4	
13.	<ul style="list-style-type: none"> <li>ustalenie dziedziny nierówności (<math>x \in \mathbf{R}</math>) i doprowadzenie jej do postaci <math>(m - 1)x^2 + (m + 2)x + m - 1 &gt; 0</math> (1 pkt)</li> <li>rozważenie przypadku dla <math>m = 1</math> i stwierdzenie, że parametr ten nie spełnia warunków zadania (1 pkt)</li> <li>ustalenie warunków zadania w przypadku, gdy <math>m \in \mathbf{R} - \{0\}</math> (<math>m - 1 &gt; 0</math> i <math>\Delta &lt; 0</math>) (1 pkt)</li> <li>rozwiązanie układu warunków i podanie poprawnej odpowiedzi (<math>m \in (4, +\infty)</math>) (1 pkt)</li> </ul>	4	
14.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznaczenie z równania zmiennej <math>y</math> i zapisanie odpowiednich założeń: <math>y = 4 + \frac{3}{x - 2}</math>, gdzie <math>x \neq -1 \wedge y \neq 3 \wedge x \neq 2</math> (2 pkt)</li> <li>narysowanie wykresu funkcji <math>y = 4 + \frac{3}{x - 2}</math> z uwzględnieniem założeń (2 pkt)</li> <li>narysowanie wykresu funkcji <math>y =  f(x) </math> (1 pkt)</li> </ul> 	5	

15.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zapisanie założenia i tezy (1 pkt)</li> </ul> zał.: $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 48x + 36 \geq 0$ – dana nierówność teza: Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $\mathbf{R}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• przeprowadzenie poprawnego dowodu (3 pkt)</li> </ul> Rozważmy wielomian występujący po lewej stronie nierówności: $W(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 48x + 36$ . Mamy $W(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 16x^2 - 48x + 36 =$ $= x^2(4x^2 - 12x + 9) + 4(4x^2 - 12x + 9) =$ $= (4x^2 - 12x + 9)(x^2 + 4) = (2x - 3)^2(x^2 + 4)$ $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} (2x - 3)^2 \geq 0$ i $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} x^2 + 4 > 0$ , więc $(2x - 3)^2(x^2 + 4) \geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$ .	4	
		Razem 50	Razem .....

Jeśli nie jesteś usatysfakcjonowany wynikiem, to ponownie skorzystaj z literatury i przystąp do drugiego sprawdzianu.

Miejsce na naklejkę  
z kodem

(Wpisuje zdający  
przed rozpoczęciem pracy)

--	--	--

**KOD ZDAJĄCEGO**

## PRZYKŁADOWY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI nr 2

ARKUSZ I

Arkusz I

Czas pracy 120 minut

### Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron. Ewentualny brak należy zgłosić do przewodniczącego zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie skreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą za poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać.
9. Podczas egzaminu można korzystać z załączonego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie wolno korzystać z kalkulatora graficznego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie 50 punktów.

Abiturient zdał egzamin, jeśli za rozwiązanie zadań z Arkusza I otrzymał co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania.

(Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**PESEL ZDAJĄCEGO**

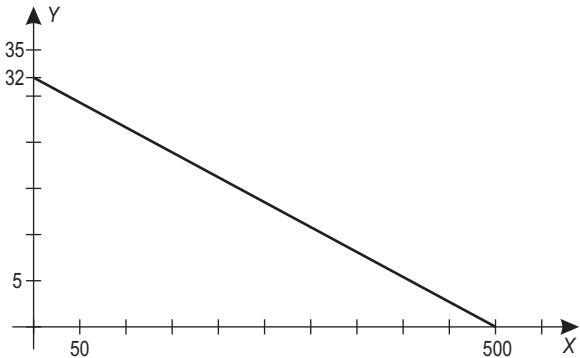
**Zadanie 1. (4 pkt)**

Kierowca samochodu wlał do pustego baku 32 litry paliwa i wyruszył w podróż swoim samochodem po autostradzie. Jego samochód zużywa średnio w czasie takiej jazdy 6,4 litra paliwa na 100 przejechanych kilometrów. Niech  $y(x)$  oznacza liczbę litrów paliwa, jakie pozostają w baku po przejechaniu  $x$  kilometrów.

- Podaj wzór funkcji  $y(x)$ .
- Przyjmując za jednostkę na osi  $OX$  50 km, zaś na osi  $OY$  5 litrów, naszkicuj wykres funkcji  $y(x)$ .
- Oblicz, ile kilometrów kierowca może przejechać, aby nie zapaliła się kontrolka małej ilości paliwa, która włącza się, gdy w baku jest mniej niż 6 litrów paliwa.

miejsce na rozwiązanie zadania

## Model odpowiedzi i schemat oceniania arkusza egzaminacyjnego.

Numer zadania	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
1.	<ul style="list-style-type: none"> <li>podanie wzoru funkcji <math>y(x) = 32 - 0,064x</math>, <math>x \in \langle 0, 500 \rangle</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>naszkicowanie wykresu funkcji <math>y(x)</math></li> </ul> 	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>zapisanie nierówności <math>32 - 0,064x \geq 6</math> i jej rozwiązanie: <math>x \leq 406\frac{1}{4}</math> [km]</li> </ul>	1
2.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznaczenie zbiorów <math>A = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)</math> i <math>B = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty</math> oraz zaznaczenie ich na osi</li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>podanie zbioru <math>A \cup B = (-\infty, 1) \cup \langle 2, +\infty</math> i sporządzenie rysunku</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>podanie zbioru <math>A \cap B = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)</math> i sporządzenie rysunku</li> </ul>	1
3.	<ul style="list-style-type: none"> <li>określenie przestrzeni zdarzeń elementarnych <math>\Omega</math> – zbiór wszystkich trzelementowych podzbiorów zbioru 20 losów i obliczenie liczby zdarzeń elementarnych <math>\bar{\Omega} = \binom{20}{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>rozważenie wszystkich przypadków, gdy łączna wygrana jest równa co najmniej 20 zł i obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających <math>\bar{A} = \binom{2}{2} \binom{13}{1} + \binom{5}{2} \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \binom{5}{1}</math></li> </ul>	3
	<ul style="list-style-type: none"> <li>obliczenie szukanego prawdopodobieństwa <math>P(A) = \frac{1}{30}</math></li> </ul>	1
4.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia kwadratu długości boku wpisanego kwadratu w zależności od długości <math>x</math> jednego z odcinków, na które został podzielony bok danego kwadratu: <math>a^2 = 2x^2 - 40x + 400</math>, <math>x \in (0, 20)</math></li> </ul>	3
	<ul style="list-style-type: none"> <li>obliczenie argumentu <math>x = 10</math>, dla którego funkcja <math>P(x) = 2x^2 - 40x + 400</math>, <math>x \in (0, 20)</math>, wyrażająca pole wpisanego kwadratu, osiąga najmniejszą wartość i obliczenie szukanego stosunku: <math>k = 1</math></li> </ul>	1
5.	<ul style="list-style-type: none"> <li>ułożenie równania <math>16 + 18 + 20 + \dots + x = 544</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystanie wzorów dla ciągu arytmetycznego i ułożenie układu równań: <math display="block">\begin{cases} x = 16 + (n-1) \cdot 2 \\ \frac{16+x}{2} \cdot n = 544 \end{cases}</math></li> </ul>	3

Miejsce na naklejkę  
z kodem

(Wpisuje zdający  
przed rozpoczęciem pracy)

--	--	--

**KOD ZDAJĄCEGO**

## PRZYKŁADOWY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI nr 2

ARKUSZ II

Arkusz II  
(dla poziomu rozszerzonego)

Czas pracy 150 minut

### Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 13 stron. Ewentualny brak należy zgłosić do przewodniczącego zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie skreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą za poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać.
9. Podczas egzaminu można korzystać z załączonego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie wolno korzystać z kalkulatora graficznego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie 50 punktów.

(Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

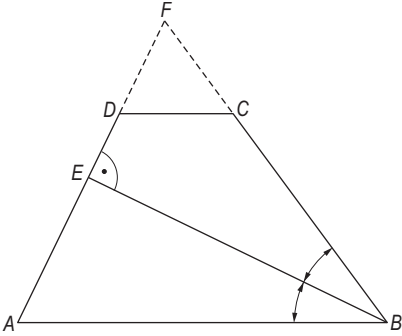
**PESEL ZDAJĄCEGO**

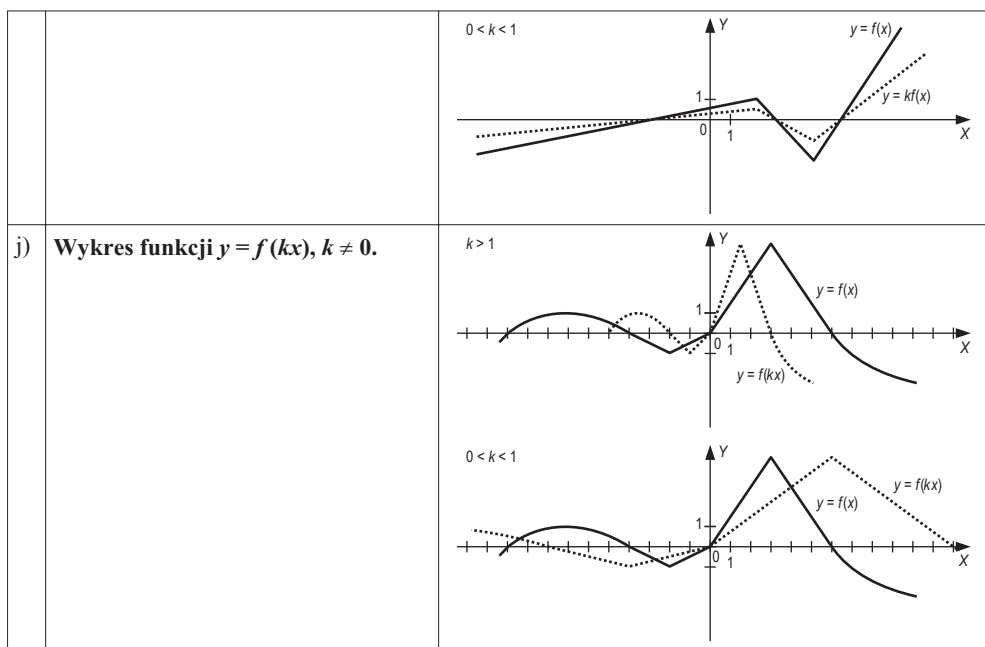
**Zadanie 12. (5 pkt)**

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość 8 cm, a wysokość 12 cm. Rozważmy wszystkie prostopadłościany, których jedna podstawa jest zawarta w podstawie ostrosłupa, a wierzchołki przeciwległej podstawy należą do krawędzi bocznych ostrosłupa. Znajdź wymiary tego z rozważanych prostopadłościanów, który ma największą objętość.

miejsce na rozwiązanie zadania

## Model odpowiedzi i schemat oceniania arkusza egzaminacyjnego.

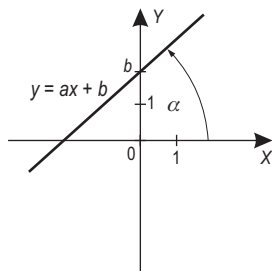
Numer zadania	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
12.	<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystanie podobieństwa trójkątów do znalezienia zależności <math>\frac{a}{8} = \frac{12-h}{12}</math>, gdzie <math>a</math> i <math>h</math> są odpowiednio długościami podstawy i wysokości prostopadłościanu</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznaczenie wzoru i dziedziny funkcji, wyrażającej objętość prostopadłościanu np. <math>V = \frac{3}{2}(8a^2 - a^3)</math>, <math>a \in (0, 8)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>obliczenie <math>V</math> i znalezienie punktu krytycznego <math>a = \frac{16}{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>zbadanie warunku dostatecznego istnienia ekstremum: <math>V'(a) &gt; 0</math> dla <math>a \in (0, \frac{16}{3})</math>, <math>V'(a) &lt; 0</math> dla <math>a \in (\frac{16}{3}, 8)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>znalezienie wymiarów szukanego prostopadłościanu: <math>a = \frac{16}{3}</math>, <math>h = 4</math></li> </ul>	1
13.	<ul style="list-style-type: none"> <li>zapisanie założenia <math>x \neq 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>przekształcenie nierówności do postaci <math>\frac{2x+1}{x^2} \geq \frac{2x+1}{4x}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>rozwiązanie otrzymanej nierówności: <math>x \in \left(-\frac{1}{2}, 4\right) - \{0\}</math></li> </ul>	1
14.	<ul style="list-style-type: none"> <li>zauważenie, że trójkąty <math>AEB</math> i <math>BEF</math> są przystające (kbk)</li> </ul> 	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystanie założenia, że <math> AE  = 2 ED </math> i wykazanego przystawania trójkątów do wywnioskowania, że <math> DF  = \frac{1}{4} AF </math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>zauważenie następujących związków pomiędzy polami: <math>S_{\Delta FCD} = \frac{1}{16}</math> (bo <math>DCF \sim ABF</math> w skali <math>\frac{1}{4}</math>), <math>S_{\Delta ABE} = S_{\Delta EBF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABF}</math>, <math>S_{EBCD} = S_{\Delta EBF} - S_{\Delta DCF} = \frac{7}{16} S_{\Delta ABF}</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>obliczenie <math>\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{BCDE}} = \frac{8}{7}</math></li> </ul>	1



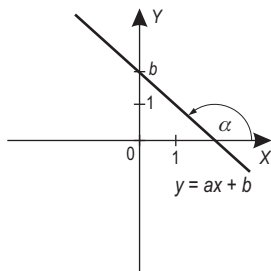
### III. WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

#### 1. Funkcja liniowa.

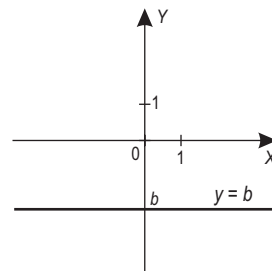
- Funkcją liniową** nazywamy funkcję  $y = ax + b$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;  $a$  i  $b$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi:  $a$  nazywamy współczynnikiem kierunkowym (kątowym),  $b$  – wyrazem wolnym.
- Wykresem funkcji**  $y = ax + b$ , gdzie  $x \in \mathbf{R}$ , jest linia prosta nachylona do osi  $OX$  pod takim kątem  $\alpha$ , że  $\operatorname{tg} \alpha = a$ . Prosta przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, b)$ .



$a > 0$  (funkcja rosnąca)

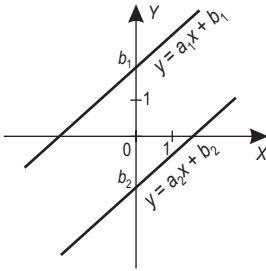


$a < 0$  (funkcja malejąca)



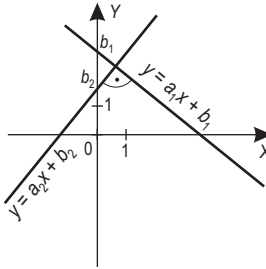
$a = 0$  (funkcja stała)

c)



Wykresy funkcji liniowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są równe czyli  $a_1 = a_2$ .

d)



Wykresy funkcji liniowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$ ,  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek  $a_1 \cdot a_2 = -1$ .

2. **Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.**

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & \text{gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \\ a_2x + b_2y = c_2, & \text{gdzie } a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ ma tylko jedno rozwiązanie (układ oznaczony)} \\ - \text{ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony), jeśli } W = W_x = W_y = 0 \\ - \text{ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny), jeśli } W = 0 \text{ i przynajmniej jeden z wyznaczników } W_x, W_y, \text{ jest różny od zera} \end{array} \right\} \begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}, \text{ jeśli } W \neq 0$$

gdzie:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

3. **Funkcja kwadratowa.**

a) **Funkcją kwadratową** (trójmianem kwadratowym) w postaci ogólnej nazywamy funkcję o wzorze  $y = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

$\Delta = b^2 - 4ac$  – wyróżnik funkcji kwadratowej

b) **Wykresem funkcji kwadratowej**  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ .