

2. Przykładowe scenariusze lekcji

Scenariusz nr 1

Zakres rozszerzony

Temat lekcji: „Dyskusja nad liczbą rozwiązań równania liniowego z wartością bezwzględną i parametrem”.

Wprowadzenie

Lekcja przeznaczona jest do przeprowadzenia w pierwszej klasie liceum realizującej zakres rozszerzony matematyki. Na poprzednich lekcjach uczniowie rozwiązywali równania liniowe z parametrem. Posiadają też umiejętność rozwiązywania metodą algebraiczną równań liniowych z wartością bezwzględną. Potrafią interpretować je graficznie.

Celem lekcji jest zapoznanie uczniów z różnymi metodami wyznaczania liczby rozwiązań równania liniowego z wartością bezwzględną i parametrem oraz rozwijanie umiejętności dokonywania wyboru metod, które skutecznie i szybko prowadzą do rozwiązania danego problemu.

Czas trwania lekcji – dwie jednostki lekcyjne (90 minut).

Forma pracy – praca w grupach 5 – 6 osobowych.

Metoda pracy – drzewo decyzyjne.

Metoda ta służy rozwijaniu umiejętności dokonywania wyboru i podejmowania decyzji, z pełną świadomością skutków, które ta decyzja ma przynieść.

Materiały pomocnicze

- Przygotowanie dla każdej grupy papieru podaniowego w kratkę.
 - Przygotowanie dla każdej grupy zestawu zadań – załącznik nr 1.
 - Przygotowanie dla każdej grupy schematu drzewa decyzyjnego – załącznik nr 2.
- Materiały pomocnicze przygotowuje nauczyciel.

Zamierzona struktura lekcji:

Kolejne etapy	Proponowany przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Zaangażowanie	Nauczyciel: – informuje uczniów, co będzie przedmiotem zajęć; zapisuje temat na tablicy; – dzieli uczniów na 5 – 6 osobowe grupy; – omawia metodę pracy: ➤ informuje uczniów, że każda z grup otrzyma zestaw zadań – równania liniowe z wartością bezwzględną i parametrem oraz schemat drzewa decyzyjnego;	10 minut	komunikacja uczeń – nauczyciel;

Matematyka. Materiały pomocnicze dla nauczyciela

	<ul style="list-style-type: none"> ➤ podkreśla, że zadaniem każdej grupy będzie znalezienie różnych sposobów na określenie liczby rozwiązań równania liniowego z wartością bezwzględną i parametrem; jednocześnie informuje, że znalezione różne możliwe rozwiązania należy wpisać na dole drzewa – drzewo ma tyle gałęzi, ile jest pomysłów na rozwiązanie problemu; ➤ zaznacza, że każde z możliwych rozwiązań winno być ocenione przez autorów pomysłu – należy określić zarówno pozytywne, jak i negatywne skutki każdej możliwości rozwiązania z punktu widzenia stawianych sobie celów i wartości – wady i zalety przedstawionej metody należy wypisać na schemacie drzewa; ➤ informuje, że ostatecznym celem pracy jest podjęcie decyzji, czyli wybranie metody rozwiązania, która szybko i skutecznie prowadzi do rozwiązania problemu – decyzję tę uczniowie podejmują grupowo i wpisują na „czubku drzewa”; <p>– rozdaje zestawy zadań oraz schemat drzewa decyzyjnego każdej z grup.</p>		
II faza Badanie	<p>Uczniowie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – samodzielnie analizują otrzymane zadania; – odnoszą się do wcześniejszych doświadczeń i posiadanych wiadomości; – dyskutują nad możliwościami różnych sposobów rozwiązania problemu; – podejmują próby różnych możliwych rozwiązań; – wymieniają wątpliwości i uwagi. <p>Nauczyciel – obserwator i słuchacz.</p>	15 minut	<ul style="list-style-type: none"> – współpraca w grupie; – dyskusowanie; – argumentowanie; – zaangażowanie w rozwiązanie problemu;
III faza Przekształcanie	<p>Uczniowie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – porządkują informacje, które pojawiły się w procesie badania; – przystępują do rozwiązania zadań; – przedstawiają różne możliwości rozwiązań na papierze podaniowym; – oceniają różne sposoby rozwiązań dostrzegając ich wady i zalety; – podejmują decyzję o wyborze metody, która z punktu widzenia celów i wartości wydaje się im najlepsza; – uzupełniają schemat drzewa decyzyjnego. <p>Nauczyciel:</p> <ul style="list-style-type: none"> – obserwuje pracę uczniów; – odpowiada na pytania; – konsultuje się z poszczególnymi grupami. 	30 minut	<ul style="list-style-type: none"> – porządkowanie informacji; – samodzielność w rozwiązywaniu problemów; – ocena stosowanych metod rozwiązań; – podejmowanie decyzji; – planowanie prezentacji wyników;

2. Przykładowe scenariusze lekcji

IV faza Prezentacja	<p>Uczniowie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – przedstawiciele grup prezentują wyniki pracy zespołowej; – pozostali uczniowie analizują i porównują sposoby rozwiązania problemu przez inne zespoły; – oceniają rezultaty pracy własnej grupy oraz innych zespołów. <p>Nauczyciel:</p> <ul style="list-style-type: none"> – obserwuje sposób prezentacji; – w razie potrzeby komentuje efekty pracy poszczególnych grup. 	25 minut	<ul style="list-style-type: none"> – komunikacja uczeń – nauczyciel; – autoprezentacja; – argumentowanie; – formułowanie wniosków;
V faza Refleksja	<p>Uczniowie:</p> <ul style="list-style-type: none"> – dokonują samooceny; – uświadamiają sobie czego się nauczyli oraz czemu służyła metoda pracy na lekcji; – wyciągają wnioski do dalszej pracy; – oceniają przebieg lekcji i osiągnięte rezultaty. <p>Nauczyciel bierze czynny udział w dyskusji – wyraża własną opinię na temat przebiegu lekcji i zaangażowania uczniów, słucha uwag uczniowskich.</p>	10 minut	pogłębienie świadomości procesu własnego uczenia się.

Załącznik nr 1

Dane jest równanie z niewiadomą x i parametrem m , $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}$. Zbadaj liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru m :

- a) $|x - 3| = m$,
- b) $|x + 1| + x = m$,
- c) $|x - 1| - |x| = m + 2$.

Załącznik nr 2 (Schemat drzewa decyzyjnego, str. 24.)

Uwagi i spostrzeżenia

I. Różne możliwości rozwiązań prezentowane przez uczniów.

ad 1) $|x - 3| = m$

I sposób

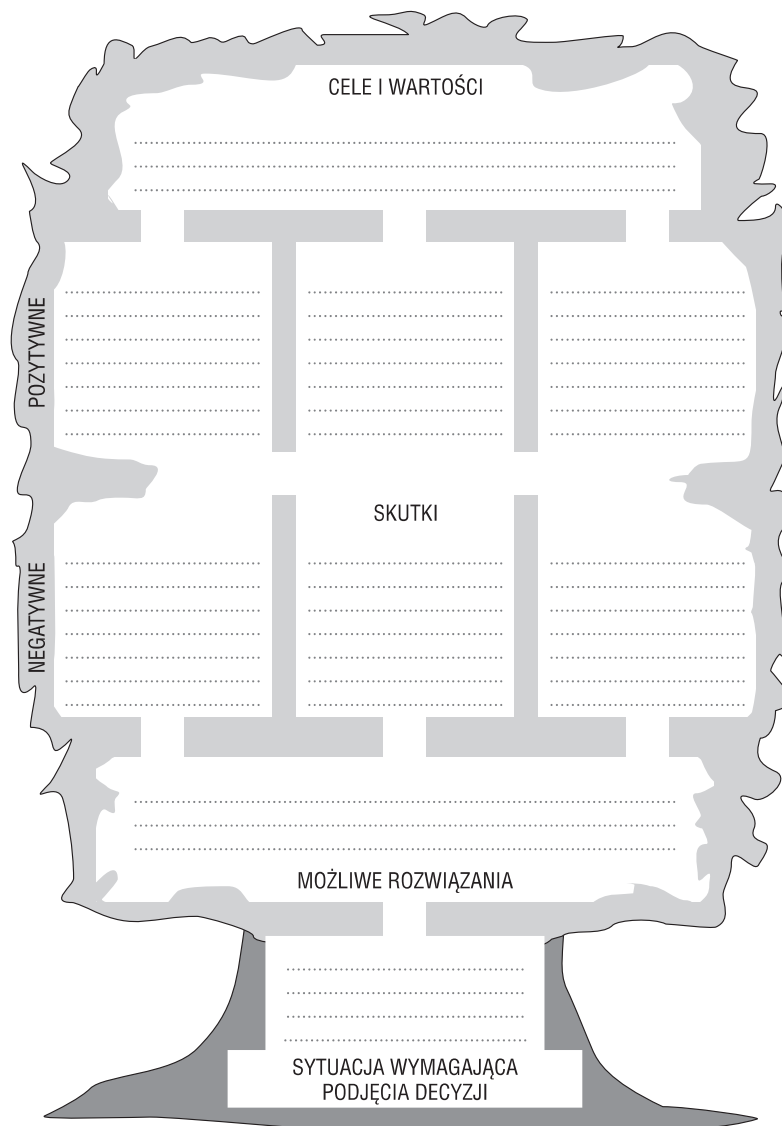
Korzystając z własności wartości bezwzględnej łatwo zauważyć, że rozważane równanie ma:

0 rozwiązań dla $m < 0$ (bo $\bigwedge_{w \in \mathbf{R}} |w| \geq 0$),

1 rozwiązanie dla $m = 0$ (bo $|x - 3| = 0 \Leftrightarrow x = 3$),

2 rozwiązania dla $m > 0$ (bo $|x - 3| = m$, gdzie $m > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - 3 = m \vee x - 3 = -m \Leftrightarrow x = m + 3 \vee x = 3 - m$).

Schemat drzewa decyzyjnego



II sposób (metoda algebraiczna)

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy alternatywę warunków:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 = m \end{cases} \vee \begin{cases} x - 3 < 0 \\ -x + 3 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = m + 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ x = 3 - m \end{cases}$$

- Równanie ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m + 3 \geq 3 \wedge 3 - m < 3 \Leftrightarrow m \geq 0 \wedge m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

- Równanie ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy
 $(m + 3 \geq 3 \wedge 3 - m \geq 3) \vee (m + 3 < 3 \wedge 3 - m < 3) \Leftrightarrow (m \geq 0 \wedge m \leq 0) \vee$
 $\vee (m < 0 \wedge m > 0) \Leftrightarrow m = 0.$
- Równanie nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy
 $m + 3 < 3 \wedge 3 - m \geq 3 \Leftrightarrow m < 0 \wedge m \leq 0 \Leftrightarrow m < 0.$

Wniosek.

Równanie ma:

0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, 0),$

1 rozwiązanie dla $m = 0,$

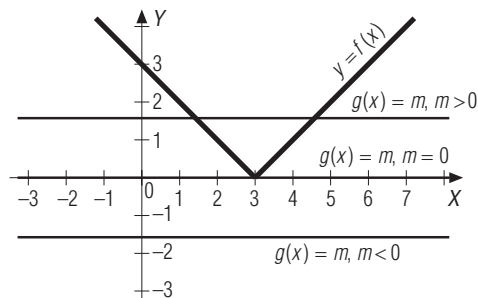
2 rozwiązania dla $m \in (0, +\infty),$

III sposób (metoda graficzna)

Interpretujemy równanie $|x - 3| = m$ graficznie jako równość dwóch funkcji:

$f(x) = |x - 3|, x \in \mathbf{R}$ oraz $g(x) = m, x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}.$

Równanie $|x - 3| = m$ ma tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f oraz g .



Wniosek.

Równanie ma:

0 rozwiązań dla $m < 0$ (wykresy funkcji f oraz g nie mają punktów wspólnych),

1 rozwiązanie dla $m = 0$ (wykresy mają jeden punkt wspólny),

2 rozwiązania dla $m > 0$ (wykresy mają dwa punkty wspólne).

ad 2) $|x + 1| + x = m.$

I sposób (metoda algebraiczna)

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy alternatywę warunków:

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ -x - 1 + x = m \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 + x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 \cdot x = m + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 \cdot x = m + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{m - 1}{2} \end{cases}$$

- Rozważmy pierwszy człon alternatywy.

Równanie $0 \cdot x = m + 1$ jest tożsamościowe dla $m = -1$, natomiast sprzeczne

dla $m \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

Dziedziną równania jest przedział $(-\infty, -1)$, zatem możemy wnioskować, że dla $m = -1$ równanie $0 \cdot x = m + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba z przedziału $(-\infty, -1)$ jest jego rozwiązaniem), zaś dla $m \neq -1$ nie ma rozwiązań.

– Rozważmy drugi człon alternatywy.

Równanie $2x + 1 = m$ ma rozwiązanie w przedziale $(-1, +\infty)$ tylko wtedy, gdy $\frac{m-1}{2} \geq -1$, natomiast nie ma rozwiązań, gdy $\frac{m-1}{2} < -1$. Zatem równanie $2x + 1 = m$

ma jedno rozwiązanie dla $m \geq -1$ i nie ma rozwiązań dla $m < -1$.

Podsumujmy nasze spostrzeżenia:

- dla $m > -1$ równanie $2x + 1 = m$ ma jedno rozwiązanie, a równanie $0 \cdot x = m + 1$ jest sprzeczne, więc równanie wyjściowe ma jedno rozwiązanie;
- dla $m = -1$ równanie $2x + 1 = m$ ma jedno rozwiązanie, a równanie $0 \cdot x = m + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, więc równanie wyjściowe ma nieskończenie wiele rozwiązań;
- dla $m < -1$ zarówno równanie $0 \cdot x = m + 1$, jak też równanie $2x + 1 = m$ jest sprzeczne, więc równanie wyjściowe nie ma rozwiązań.

Wniosek.

Równanie ma:

0 rozwiązań dla $m < -1$,

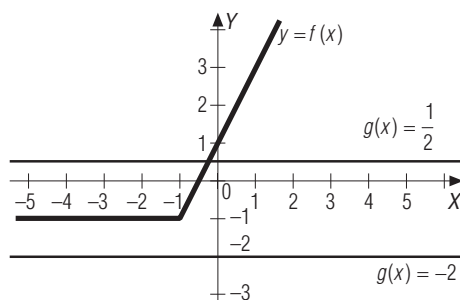
1 rozwiązanie dla $m > -1$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -1$.

II sposób (metoda graficzna)

Równanie $|x + 1| + x = m$ traktujemy jako równość dwóch funkcji:

$$f(x) = |x + 1| + x, \text{ czyli } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \geq -1 \\ -1 & \text{dla } x < -1 \end{cases} \text{ oraz } g(x) = m, m \in \mathbf{R}.$$



Łatwo zauważyć, że równanie ma:

0 rozwiązań dla $m < -1$,

1 rozwiązanie dla $m > -1$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -1$.

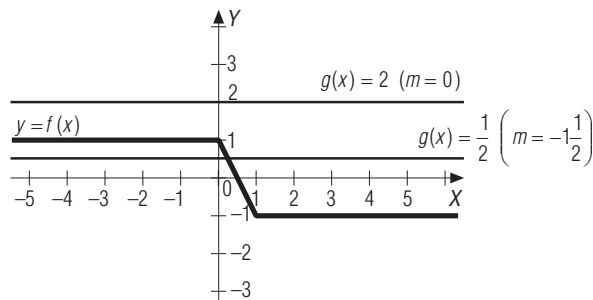
2. Przykładowe scenariusze lekcji

ad 3) $|x - 1| - |x| = m + 2$.

I sposób (metoda graficzna)

Traktujemy równanie jako równość dwóch funkcji:

$$f(x) = |x - 1| - |x|, \text{ czyli } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ -2x + 1 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ -1 & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad \text{oraz } g(x) = m + 2, \quad m \in \mathbf{R}.$$



Łatwo zauważyć, że rozważane równanie ma:

0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$,

1 rozwiązanie dla $m \in (-3, -1)$,

nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{-3, -1\}$.

II. Analiza błędów uczniowskich

Uczniowie chętnie wybierają metodę algebraiczną. Ta metoda wydaje się im skuteczna. Tymczasem popełniają wiele błędów rzeczowych:

– np. po zastąpieniu równania $|x - 3| = m$ alternatywą warunków:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x = m + 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ x = 3 - m \end{cases}$$

wnioskują, że rozważane równanie ma dwa rozwiązania $x = m + 3$ oraz $x = 3 - m$ dla każdej wartości parametru m . Należy więc wyraźnie przypomnieć uczniom o dziedzinie równania i jej wpływie na zbiór rozwiązań;

– mają duże trudności w „połączeniu” otrzymanych wyników przy rozważaniu kilku przypadków, szczególnie wówczas, gdy w równaniu występuje więcej niż jeden znak wartości bezwzględnej.

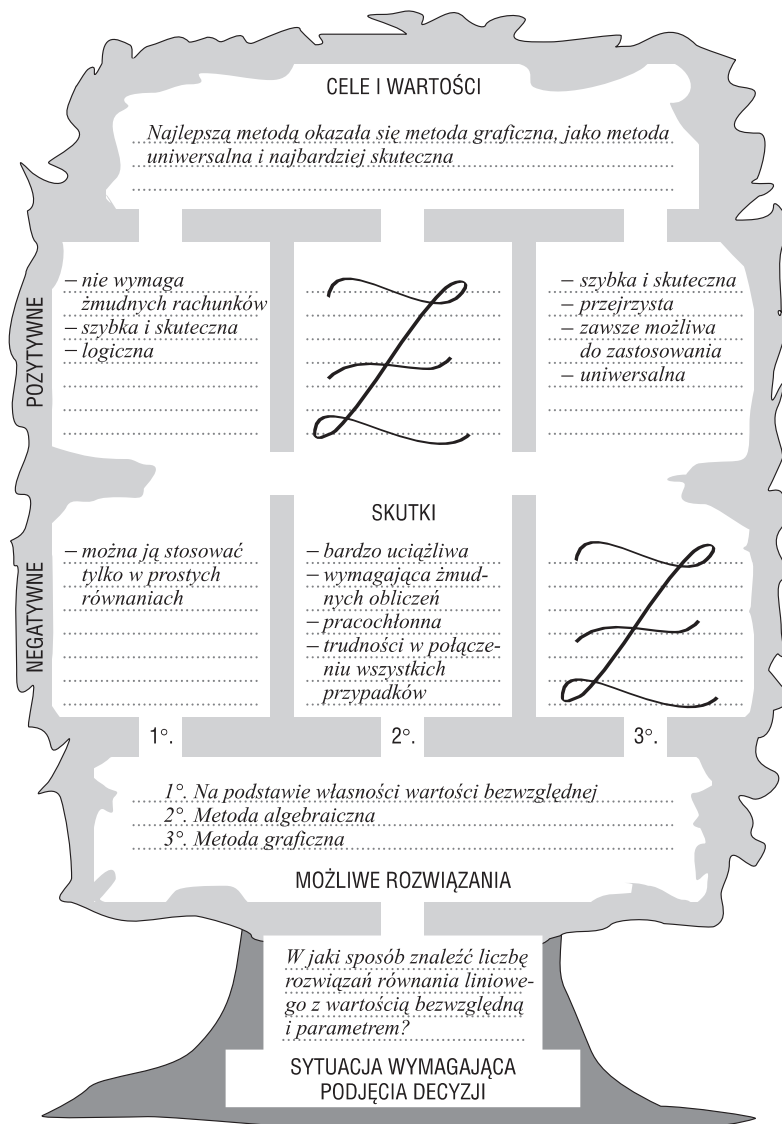
Najczęstszym błędem popełnianym przy wyborze metody graficznej jest błędna interpretacja funkcji o wzorze $g(x) = m$ ($g(x) = m + 2$), $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}$. Uczniowie utożsamiają tę funkcję z funkcją liniową odpowiednio o wzorze $g(x) = x$ ($g(x) = x + 2$), $x \in \mathbf{R}$.

III. Uwagi końcowe

Lekcja ta ma charakter problemowy. Stawia przed uczniami trudne zadania. Wymaga od nich twórczej postawy, pomysłowości i dużego zaangażowania. Warto taką lekcję przeprowadzić.

Przykład opisanego drzewa decyzyjnego:

Schemat drzewa decyzyjnego



Scenariusz nr 2

Zakres podstawowy (rozszerzony)

Temat lekcji: „Zastosowanie nierówności liniowych do rozwiązywania zagadnień ekonomicznych”.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

Celem lekcji jest zapoznanie uczniów z metodą programowania liniowego

Czas trwania lekcji – dwie jednostki lekcyjne (90 minut).

Forma pracy – pierwsza część lekcji, praca z całą klasą
– druga część lekcji, praca w grupach (5 grup).

Metoda pracy – metoda problemowa.

Metoda problemowa polega na samodzielnym rozwiązywaniu przez uczniów pewnego zadania problemowego. Metoda ta kształci umiejętności matematyczne uczniów np. takie jak analizowanie informacji, budowanie modeli matematycznych różnych zjawisk, argumentowanie, wnioskowanie itd.

Materiały pomocnicze

- papier podaniowy w kratkę dla każdej grupy;
- linijki, ołówki, kalkulatory;
- przygotowanie pięciu różnych zadań problemowych (po jednym dla każdej grupy) – załącznik nr 1;
- przygotowanie dla każdego ucznia kartki z tekstem zadań z załącznika nr 1.

Zamierzona struktura lekcji:

I część lekcji – praca z całą klasą (30 minut)

- Nauczyciel stawia przed uczniami problem:
„Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20dag wełny czarnej i 40 dag wełny białej, a do produkcji swetra męskiego – 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg, natomiast białej – 140 kg. Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 38 zł, a ze swetra damskiego – 44 zł. Ile i jakich swetrów powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć jak najwyższy zysk?”
- Nauczyciel poleca, aby uczniowie dokładnie zapoznali się z treścią zadania.
- Uczniowie wyszukują informacje zawarte w treści zadania, zastanawiają się co jest wielkością szukaną i od jakich zmiennych zależy wielkość szukana (analiza treści).
- Nauczyciel sprawdza w dyskusji z uczniami, czy treść zadania jest dla nich zrozumiała. Jeśli tak jest, proponuje aby uczniowie zapisali posiadane informacje w tabeli:

	Liczba swetrów	Liczba dag wełny białej potrzebnej do wykonania swetrów:	Liczba dag wełny czarnej potrzebnej do wykonania swetrów
Swetry damskie			
Swetry męskie			
Ogółem:			

Aby uzupełnić puste miejsca w tabeli należy wprowadzić zmienne pomocnicze:

- uczniowie oznaczają potrzebne wielkości, np:
liczba swetrów damskich: x (zmienna zależna),
liczba swetrów męskich: y (zmienna zależna),
- określają proste zależności pomiędzy zmiennymi a wielkościami liczbowymi, np.:
„liczba dag wełny białej potrzebna do wykonania x swetrów damskich jest równa $40 \cdot x$ ”,
„liczba dag wełny białej potrzebna do wykonania y swetrów męskich jest równa $20 \cdot y$ ”,
„liczba dag wełny białej potrzebna do wykonania x swetrów damskich i y swetrów męskich wynosi $40x + 20y$ ”, stąd ogółem „zapotrzebowanie na wełnę białą wynosi $40x + 20y$ ”; itd.
- uzupełniają puste miejsca w tabeli:

	Liczba swetrów	Liczba dag wełny białej potrzebnej do wykonania swetrów	Liczba dag wełny czarnej potrzebnej do wykonania swetrów
Swetry damskie	x	$40x$	$20x$
Swetry męskie	y	$20y$	$60y$
Sgółem:	$x + y$	$40x + 20y$	$20x + 60y$

- Teraz należy wprowadzić ograniczenia, które wynikają z analizy zagadnienia. Uczniowie zauważają, że:
 - zmienne x oraz y , które oznaczają liczbę swetrów są wielkościami nieujemnymi i całkowitymi ($x \geq 0$ i $x \in \mathbf{C}$ oraz $y \geq 0$ i $y \in \mathbf{C}$);
 - zasoby wełny białej ograniczone są przez 140 kg (14 000 dag), a zasoby wełny czarnej ograniczone są przez 120 kg (12 000 dag), zatem:
 $40x + 20y \leq 14000$ oraz $20x + 60y \leq 12000$.

Nauczyciel poleca, aby otrzymane nierówności zapisać w postaci układu:

$$\begin{cases} x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \\ 40x + 20y \leq 14000 \\ 20x + 60y \leq 12000, \end{cases}$$

który po uproszczeniu jest równoważny układowi nierówności:

$$\begin{cases} x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \\ y \leq -2x + 700 \\ y \leq -\frac{1}{3}x + 200. \end{cases}$$

- Przyszedł czas na określenie „funkcji zysku”.

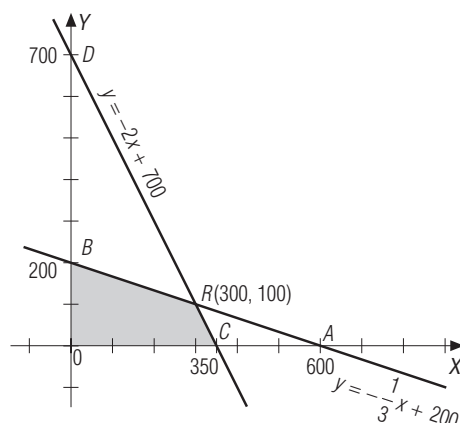
Uczniowie zdają sobie sprawę, że całkowity zysk zakładu włókienniczego zależy od wielkości zysku na pojedynczym swetrze (damskim – 44 zł, męskim – 38 zł) oraz od

2. Przykładowe scenariusze lekcji

liczby wyprodukowanych swetrów damskich (x) oraz męskich (y). Ustalają wzór „funkcji zysku”:

$$Z(x, y) = 44x + 38y.$$

- Nauczyciel proponuje, aby uczniowie przedstawili wykres układu nierówności oraz żeby wspólnie przeanalizowali rysunek.



Współrzędne całkowite punktów $\triangle OAB$ określają, na ile swetrów damskich i męskich wystarczy wełny czarnej. Podobne znaczenie mają współrzędne punktów $\triangle OCD$ w odniesieniu do wełny białej. Swetry są dwukolorowe, zatem interesuje nas część wspólna trójkątów OAB i OCD , tzn. czworokąt $OCRB$. Współrzędne całkowite punktów należących do tego czworokąta określają, ile w ogóle swetrów damskich i męskich można wyprodukować. Optymalnej liczby swetrów należy szukać w punktach wierzchołkowych otrzymanego czworokąta.

- Obliczamy wartość „funkcji zysku” dla par liczb $(0, 0)$, $(350, 0)$, $(300, 100)$, $(0, 200)$. Uczniowie wybierają parę liczb, dla których „funkcja zysku” osiąga największą wartość. W tym wypadku optymalną liczbę swetrów określają współrzędne punktu $R(300, 100)$. Zysk maksymalny wynosi 15 800 złotych.
- Nauczyciel informuje uczniów, że zastosowana metoda do rozwiązania problemu nazywa się programowaniem liniowym. Ma ona zastosowanie do rozwiązywania różnych zagadnień ekonomicznych.
- Nauczyciel przypomina uczniom kolejne etapy budowania modelu matematycznego rozważanego zagadnienia:
 - 1) analiza treści (tabela),
 - 2) wprowadzenie zmiennych (uzupełnienie tabeli),
 - 3) wprowadzenie ograniczeń wynikających z treści zadania i zbudowanie układu nierówności
 - 4) określenie „funkcji zysku”,
 - 5) naszkicowanie wykresu układu nierówności i wskazanie punktów wierzchołkowych,
 - 6) obliczenie wartości „funkcji zysku” dla punktów wierzchołkowych i wybranie opcji optymalnej.

II część lekcji (60 minut)

Kolejne etapy	Proponowany przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Zaangażowanie	Nauczyciel: – informuje uczniów, że będą pracować w 5 zespołach; dzieli uczniów na grupy; – podkreśla, że każdy zespół otrzyma inne zadanie ekonomiczne, które należy rozwiązać metodą programowania liniowego; – poleca, aby każdy zespół przedstawił rozwiązanie problemu na papierze podaniowym; – rozdaje zestawy poszczególnym grupom informując jednocześnie, że czas przeznaczony na wykonanie zadania wynosi 20 minut.	5 minut	komunikacja uczeń – nauczyciel;
II i III faza Badanie / Przekształcanie	Uczniowie: – zapoznają się z treścią zadań; – dyskutują i wymieniają spostrzeżenia; – przystępują do budowania modelu matematycznego rozważanego problemu; – opracowują uzyskane wyniki; – przygotowują się do prezentacji. Nauczyciel obserwuje pracę zespołów. W razie potrzeby odpowiada na pytania i wątpliwości uczniów.	20 minut	– komunikacja uczeń – uczeń; – współpraca w grupie; – podział zadań; – analizowanie, dyskusowanie, wnioskowanie; – opracowanie wyników;
IV faza Prezentacja	Przedstawiciele poszczególnych zespołów prezentują wyniki pracy swojej grupy. Nauczyciel obserwuje sposób prezentacji. W razie potrzeby komentuje sposób rozwiązania.	30 minut	– autoprezentacja; – precyzyjne wysławianie się; – komunikacja uczeń – nauczyciel;
V faza Refleksja	Nauczyciel wraz z uczniami dyskutują na temat przebiegu lekcji. Oceniają wartość lekcji. Oceniają wyniki pracy zespołów. Wyciągają wnioski dotyczące dalszej pracy.	5 minut	pogłębienie świadomości procesu własnego uczenia się.

Załącznik nr 1

Zadanie nr 1

Z miejscowości uzdrowskiej można w końcu sezonu wysłać najwyżej 12 pociągów dziennie. Są to pociągi ekspresowe i pośpieszne, w których wszystkie miejsca są numerowane. W skład każdego pociągu ekspresowego wchodzi 2 wagony 80-osobowe i 4 wagony 48-osobowe, a w skład każdego pociągu pospiesznego wchodzi 5 wagonów 80-osobowych i 2 wagony 48-osobowe. Stacja może wysłać dziennie najwyżej 42 wagony 80-osobowe i najwyżej 40 wagonów 48-osobowych. Ile i jakich pociągów należy wysłać dziennie, aby liczba przewiezionych pasażerów była możliwie największa? Zakładamy, że pasażerowie zajmują tylko miejsca numerowane. Jaką największą liczbę pasażerów można przewieźć?

2. Przykładowe scenariusze lekcji

Zadanie nr 2

Pewien zakład krawiecki postanowił szyc dwa rodzaje garniturów dla mężczyzn – letnie sportowe i wieczorowe. Wykonanie garnituru sportowego zajmuje krawcowi 9 godzin, zaś wieczorowego 13 godzin. Koszt uszycia garnituru sportowego wynosi 360 zł, zaś wieczorowego 480 zł. Zakład chce tygodniowo wyprodukować garnitury za kwotę nie większą niż 1560 zł. Swoje garnitury będzie sprzedawać z zyskiem, który w przypadku garnituru sportowego wynosi 120 zł, zaś wieczorowego 150 zł. Ile garniturów każdego rodzaju powinien produkować tygodniowo ten zakład, jeśli pracuje tylko od poniedziałku do piątku po 8 godzin dziennie, aby osiągnąć jak najwyższy zysk? Jaki to będzie zysk?

Zadanie nr 3

Fabryka mebli produkuje stoły i ławy z dwóch gatunków drewna. W magazynie fabryki znajduje się zapas drewna I gatunku w ilości 720 m^3 oraz II gatunku – 1200 m^3 drewna. Na wyprodukowanie stołu z drewna I gatunku potrzeba $0,18 \text{ m}^3$ materiału, a ławy $0,09 \text{ m}^3$, zaś na wykonanie stołu z drewna II gatunku zużywa się $0,24 \text{ m}^3$ materiału, a na ławę potrzeba $0,2 \text{ m}^3$ drewna. Dochód fabryki z jednego stołu wynosi 42 zł, zaś z jednej ławy 30 zł. Jak należy zaplanować produkcję, aby zysk był największy? Jaki to będzie zysk?

Zadanie nr 4

Przedsiębiorca chce zainwestować najwyżej 10 000 zł w dwa fundusze: fundusz akcji i fundusz obligacji. Średni roczny zysk funduszu akcji wynosi 12%, zaś zysk funduszu obligacji 9%. Przedsiębiorca postanowił, że w fundusz obligacji zainwestuje co najmniej 2000 zł i nie więcej niż 6 000 zł w fundusz akcji. Ponadto przedsiębiorca nie chce zainwestować w fundusz akcji więcej niż w fundusz obligacji. Ile pieniędzy powinien on zainwestować w fundusz akcji, aby uwzględniając powyższe ograniczenia, mógł osiągnąć maksymalny zysk w ciągu roku? Jakiego zysku może wówczas oczekiwać?

Zadanie nr 5

Mały zakład produkuje dwa rodzaje stolików. Wyprodukowanie dużego stolika wymaga 3 godzin pracy maszyny A i 1 godziny pracy maszyny B. Wyprodukowanie małego stolika wymaga 2 godzin pracy maszyny A i 1 godziny pracy maszyny B. W ciągu tygodnia maszyna A może pracować co najwyżej 120 godzin, a maszyna B – co najwyżej 50 godzin. Zakład zarabia na sprzedaży dużego stolika 175 zł, a na sprzedaży małego – 95 zł. Ile stolików dużych i małych powinien wyprodukować w ciągu tygodnia ten zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk? Ile będzie wynosić ten zysk?

Uwagi i spostrzeżenia

I. Przykładowe rozwiązania zadań

- ad 1) Model matematyczny do zadania 1.:
 x – liczba pociągów ekspresowych;

v – liczba pociągów nospiesznych

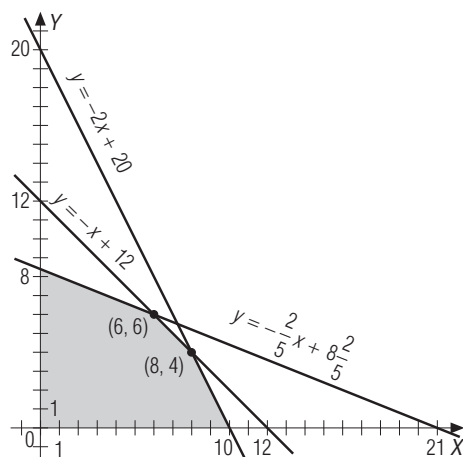
	Liczba pociągów	Liczba wagonów 80-osobowych	Liczba wagonów 48-osobowych
Pociągi ekspresowe	x	$2x$	$4x$
Pociągi pospieszne	y	$5y$	$2y$
Ogółem	$x + y$	$2x + 5y$	$4x + 2y$

$$\text{Ograniczenia: } \begin{cases} 2x + 5y \leq 42 \\ 4x + 2y \leq 40 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{2}{5}x + 8\frac{2}{5} \\ y \leq -2x + 20 \\ y \leq -x + 12 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases}$$

Określenie funkcji liczby pasażerów:

$$P(x, y) = (2 \cdot 80 + 4 \cdot 48)x + (5 \cdot 80 + 2 \cdot 48)y = 352x + 496y.$$

Wykres układu nierówności:



Po sprawdzeniu wartości funkcji zysku w punktach wierzchołkowych powstałego wielokąta otrzymujemy następujące wnioski:

Najwięcej pasażerów będzie można przewieźć wówczas, gdy stacja wyśle 6 pociągów ekspresowych i 6 pociągów pospiesznych. Wówczas

$$P(6, 6) = 352 \cdot 6 + 496 \cdot 6 = 5088. \text{ Liczba pasażerów wyniesie } 5088.$$

ad 2) Model matematyczny do zadania 2.:

x – liczba letnich garniturów sportowych;

y – liczba garniturów wieczorowych.

2. Przykładowe scenariusze lekcji

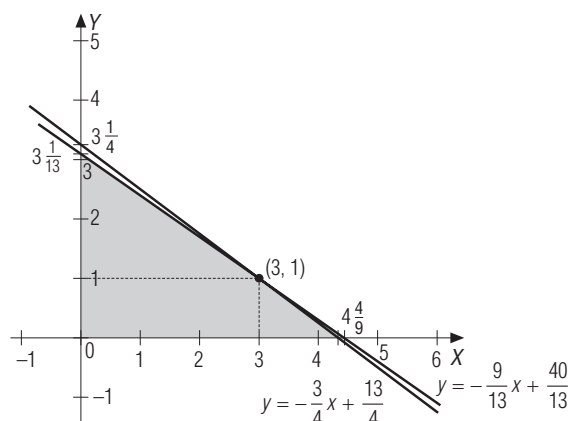
	Liczba garniturów	Czas potrzebny na wykonanie garniturów [w godz.]	Koszt uszycia garniturów [w zł]
Garnitury letnie sportowe	x	$9x$	$360x$
Garnitury wieczorowe	y	$13y$	$480y$
Ogółem	$x + y$	$9x + 13y$	$360x + 480y$

$$\text{Ograniczenia: } \begin{cases} 9x + 13y \leq 40 \\ 360x + 480y \leq 1560 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13} \\ y \leq -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4} \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases}$$

Określenie „funkcji zysku”:

$$Z(x, y) = 120x + 150y.$$

Wykres układu nierówności:



Wnioski:

Największy zysk osiągnie zakład krawiecki, jeśli w tygodniu uszyje 3 garnitury sportowe i 1 garnitur wieczorowy. Wówczas $Z(3, 1) = 120 \cdot 3 + 150 \cdot 1 = 510$.

Zysk ten wynosi 510 złotych.

ad 3) Model matematyczny do zadania 3.;

x – liczba stołów,

y – liczba ław.

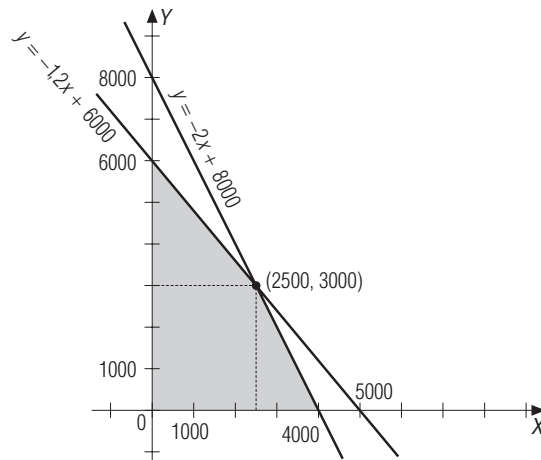
	Liczba stołów i ław	Liczba m ³ drewna I gatunku potrzebna do produkcji towaru	Liczba m ³ drewna II gatunku potrzebna do produkcji towaru
Stoły	x	$0,18x$	$0,24x$
Ławy	y	$0,09y$	$0,2y$
Ogółem	$x + y$	$0,18x + 0,09y$	$0,24x + 0,2y$

$$\text{Ograniczenia: } \begin{cases} 0,18x + 0,09y \leq 720 \\ 0,24x + 0,2y \leq 1200 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -2x + 8000 \\ y \leq -1,2x + 6000 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases}$$

Określenie „funkcji zysku”:

$$Z(x, y) = 42x + 30y.$$

Wykres układu nierówności:



Wnioski:

Należy wyprodukować 2500 stołów i 3000 ław, a wówczas zysk będzie największy.

$$Z(2500, 3000) = 42 \cdot 2500 + 30 \cdot 3000 = 195000.$$

Zysk wyniesie 195 000 złotych.

ad 4) Model matematyczny do zadania 4.;

x – kwota przeznaczona na fundusz akcji,

y – kwota przeznaczona na fundusz obligacji.

	Kwota przeznaczona na fundusz [w zł]
Fundusz akcji	x
Fundusz obligacji	y
Ogółem	$x + y$

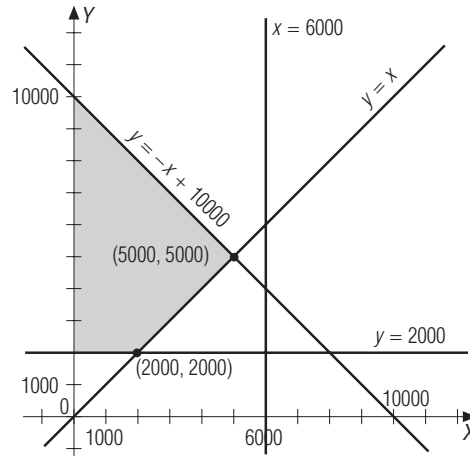
$$\text{Ograniczenia: } \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ y \geq 2000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq 0 \\ x \leq y \end{cases}$$

Określenie „funkcji zysku”:

2. Przykładowe scenariusze lekcji

$$Z(x, y) = 0,12x + 0,09y.$$

Wykres układu nierówności:



Wnioski:

Przedsiębiorca osiągnie największy zysk, jeśli zainwestuje w akcje 5000 zł i tyle samo w obligacje.

$$Z(5000, 5000) = 0,12 \cdot 5000 + 0,09 \cdot 5000 = 1050.$$

Zysk wyniesie 1050 złotych.

ad 5) Model matematyczny do zadania 5.:

x – liczba stolików dużych,

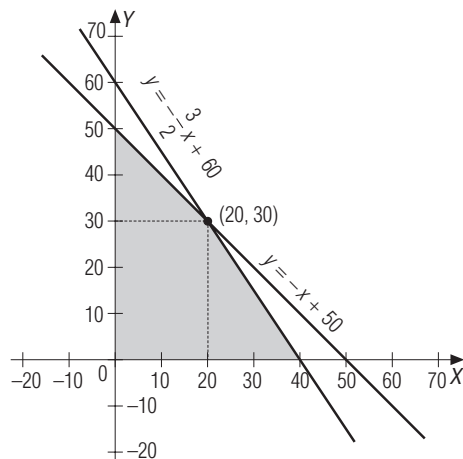
y – liczba stolików małych.

	Liczba stolików	Czas pracy maszyny A potrzebny na wykonanie towaru [w godz.]	Czas pracy maszyny B potrzebny na wykonanie towaru [w godz.]
Stoliki duże	x	$3x$	$1x$
Stoliki małe	y	$2y$	$1y$
Ogółem		$3x + 2y$	$x + y$

$$\text{Ograniczenia: } \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{3}{2}x + 60 \\ y \leq -x + 50 \\ x \geq 0 \wedge x \in \mathbf{C} \\ y \geq 0 \wedge y \in \mathbf{C} \end{cases}$$

Określenie „funkcji zysku”: $Z(x, y) = 175x + 95y$.

Wykres układu nierówności:



Wnioski:

Zakład powinien wyprodukować 20 stolików dużych i 30 małych.

Wówczas $Z(x, y) = 175 \cdot 20 + 30 \cdot 95 = 6350$.

Zysk maksymalny wyniesie 6350 złotych.

II Spostrzeżenia

Aby prezentacja pracy poszczególnych grup przebiegała sprawnie (6 minut na każdy zespół), należy zadbać o to, aby:

- 1) podczas prezentacji każdy uczeń posiadał treści zadań, które rozwiązywały poszczególne grupy;
- 2) prezentacja ograniczała się do:
 - opisanie zmiennych,
 - przedstawienia tabeli,
 - zapisania układu nierówności,
 - zapisanie „funkcji zysku”,
 - przedstawienia wykresu nierówności,
 - podania wniosku końcowego.

Warto jest zebrać opracowane przez grupy na papierze podaniowym rozwiązania zadań, sprawdzić, poprawić je, zrecenzować i oddać uczniom.

Pracę w grupach należy ocenić. Ocena może być średnią ocen (oceny z pracy pisemnej i oceny z prezentacji). Każdy członek grupy otrzymuje tę samą ocenę. Można też zróżnicować oceny w grupie, jeśli uczniowie danej grupy potrafią określić swój wkład w rozwiązanie problemu. Taką informację nauczyciel powinien uzyskać na pracy pisemnej – np. przy nazwisku ucznia pojawia się określenie stopnia zaangażowania w rozwiązanie zadania (np. bardzo duże, duże, średnie, małe, znikome, żadne) lub stopień zaangażowania może wyrażać się w ocenach: 6, 5, 4, 3, 2 lub 1.

Scenariusz nr 3

Zakres podstawowy (rozszerzony)

Temat lekcji: „Powtórzenie i utrwalenie wiadomości o wektorach”.

Wprowadzenie: Lekcję tę można przeprowadzić przed planowanym sprawdzianem, wykorzystując jedną z dwóch godzin lekcyjnych przeznaczonych na „Działania na wektorach”. Może ona również zastąpić planowany sprawdzian.

Celem lekcji jest utrwalenie wiadomości o wektorach – współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach.

Czas trwania lekcji – jedna jednostka lekcyjna (45 minut).

Forma pracy – praca w grupach 6 osobowych – każda grupa otrzymuje to samo zadanie składające się z sześciu etapów.

Metoda pracy – metoda układanki „puzzle”.

Metoda ta polega na tym, że każdy członek grupy otrzymuje część informacji niezbędnych do wykonania zadania grupowego. Poszczególni uczniowie grupy są odpowiedzialni za przygotowanie swojej porcji informacji, przekazanie jej kolegom i przyswojenie sobie informacji prezentowanych przez nich.

Materiały pomocnicze

- Przygotowanie dla każdej grupy papieru podaniowego w kratkę.
- Przygotowanie dla każdej grupy zadania – załącznik nr 1.

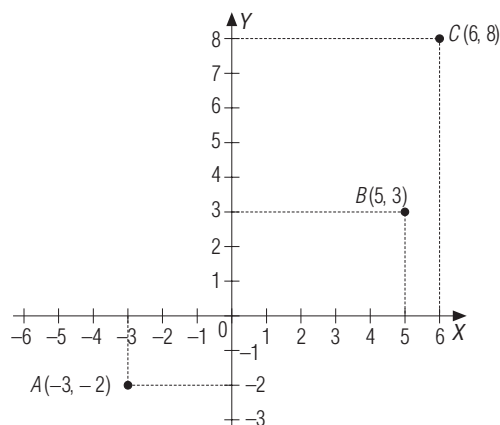
Zamierzona struktura lekcji:

Kolejne etapy	Proponowany przebieg lekcji	Czas	Umiejętności kształtowane na lekcji
I faza Zaangażowanie	Nauczyciel: – informuje uczniów co będzie przedmiotem zajęć; zapisuje temat na tablicy; – dzieli uczniów na 6-osobowe grupy; – omawia metodę pracy; – podkreśla, że poszczególni członkowie grupy są odpowiedzialni za poszczególne „fragmenty” zadania zespołowego; – rozdaje zestawy zadań poszczególnym grupom.	10 minut	komunikacja uczeń – nauczyciel;
II faza Badanie	Uczniowie: – zapoznają się z treścią zadań; – odnoszą się do wcześniejszych doświadczeń i posiadanych wiadomości; – dzielą się pracą – każdy członek grupy ma wykonać tylko jedno polecenie z zadania grupowego i przekazać porcję informacji kolegom z zespołu. Nauczyciel – obserwator i słuchacz.	5 minut	– komunikacja uczeń – uczeń; – współpraca w grupie; – podział obowiązków pomiędzy członków zespołu;

Matematyka. Materiały pomocnicze dla nauczyciela

<p>III faza Przekształcanie</p>	<p>Uczniowie: – przystępują kolejno do realizacji zadania grupowego; – każdy członek zespołu wykonuje stosowne obliczenia, informuje kolejnego członka grupy o efektach swojej pracy, dostarcza niezbędnej porcji informacji do wykonania następnego polecenia; – pozostali członkowie grupy czuwają, aby kolejne „ogniwa” zadania grupowego były wykonane poprawnie; – przyswajają informacje przekazywane przez kolegów.</p>	<p>15 minut</p>	<p>– komunikacja uczeń – uczeń; – umiejętność wywiązywania się z powierzonych zadań; – odpowiedzialność za pracę całej grupy;</p>
<p>IV faza Prezentacja</p>	<p>Nauczyciel: – wybiera losowo ucznia z pierwszej grupy i poleca mu prezentację rozwiązania pierwszego polecenia, następnie wybiera losowo ucznia z drugiej grupy by przedstawił rozwiązanie drugiego polecenia, itd. – obserwuje sposób prezentacji; – w razie potrzeby komentuje sposób rozwiązania; Uczniowie: – śledzą rozwiązania kolejnych etapów zadania; – porównują wyniki i sposób rozwiązania z własnymi; – oceniają rezultaty własnej pracy i innych grup.</p>	<p>10 minut</p>	<p>– komunikacja uczeń – nauczyciel; – autoprezentacja; – dbałość o przejrzystość rozwiązania; – dbałość o precyzję wyśławiania się;</p>
<p>V faza Refleksja</p>	<p>Uczniowie: – dokonują samooceny; – wyciągają wnioski do dalszej pracy; – oceniają przebieg lekcji od strony osiągniętych celów i atrakcyjności zajęć. Nauczyciel ocenia pracę zespołów, wyraża opinię na temat osiągniętych przez grupy efektów, słucha uwag uczniowskich.</p>	<p>5 minut</p>	<p> pogłębienie procesu uczenia się.</p>

Załącznik nr 1



2. Przykładowe scenariusze lekcji

Zadanie

Dane są punkty $A(-3, -2)$, $B(5, 3)$, $C(6, 8)$.

- Oblicz współrzędne wektorów \vec{AB} oraz \vec{BC} .
- Wyznacz współrzędne punktu D , tak aby figura $ABCD$ była równoległobokiem.
- Wyznacz współrzędne punktu P , który dzieli odcinek DC tak, że $\frac{|DP|}{|DC|} = \frac{1}{3}$.
- Oblicz współrzędne punktu E – środka odcinka AP .
- Oblicz współrzędne wektora $\vec{u} = 6\vec{EB} - 4\vec{AB}$.
- Oblicz długość wektora \vec{u} .

Uwagi i spostrzeżenia

I. Przykładowe rozwiązanie zadania

$$\begin{aligned} \text{ad (a)} \quad \vec{AB} &= [5 + 3, 3 + 2], \vec{AB} = [8, 5] \\ \vec{BC} &= [6 - 5, 8 - 3], \vec{BC} = [1, 5] \end{aligned}$$

$$\text{ad (b)} \quad \text{Niech } D(x, y), \text{ zatem } \vec{AD} = [x + 3, y + 2]. \vec{AD} = \vec{BC}, \text{ stąd } [x + 3, y + 2] = [1, 5], \\ \text{czyli } x + 3 = 1 \text{ i } y + 2 = 5, \text{ więc } x = -2, y = 3. D(-2, 3).$$

$$\text{ad (c)} \quad \frac{|DP|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \text{ więc } |DC| = 3|DP|. \text{ Zatem } \vec{DC} = 3\vec{DP}. \vec{DC} = [6 + 2, 8 - 3] = [8, 5];$$

$$\vec{DP} = [x + 2, y - 3], \text{ gdzie } P(x, y). \text{ Mamy więc: } [8, 5] = 3[x + 2, y - 3], \\ \text{skąd } 3x + 6 = 8 \text{ i } 3y - 9 = 5. \text{ Zatem } x = \frac{2}{3} \text{ i } y = 4\frac{2}{3}. P\left(\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right).$$

$$\text{ad (d)} \quad \text{Niech } E \text{ – środek odcinka } AP, E(x, y). \text{ Zatem } x = \frac{-3 + \frac{2}{3}}{2} \text{ i } y = \frac{-2 + 4\frac{2}{3}}{2},$$

$$\text{skąd } x = -\frac{7}{6} \text{ i } y = \frac{4}{3}. E\left(-\frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

$$\text{ad (e)} \quad \vec{EB} = \left[5 + 1\frac{1}{6}, 3 - 1\frac{1}{3}\right]; \vec{EB} = \left[6\frac{1}{6}, 1\frac{2}{3}\right]; \vec{AB} = [8, 5].$$

$$\text{Stąd } \vec{u} = 6\vec{EB} - 4\vec{AB} = 6 \cdot \left[6\frac{1}{6}, 1\frac{2}{3}\right] - 4[8, 5] = [37, 10] - [32, 20] = [5, -10].$$

$$\text{ad (f)} \quad |\vec{u}| = \sqrt{5^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

II Spostrzeżenia

Metoda układanki mobilizuje całą grupę do pracy. Poszczególni uczniowie są zaangażowani w rozwiązanie części zadania. Pozostali członkowie grupy muszą czuwać nad poprawnym wykonaniem czynności przez ucznia rozwiązującego „fragment” zadania, zdając sobie sprawę z tego, że efekt ich pracy będzie zależał od efektu pracy poprzednika. Cała grupa jest odpowiedzialna za wykonanie całego zadania.

Pracę grupową można ocenić. Po wykonaniu zadania przez zespół i opracowaniu rozwiązania na papierze podaniowym przez członków grupy (uczniowie podpisują się obok fragmentu wykonanego przez siebie etapu zadania), nauczyciel zbiera prace. Poprawione i zrecenzowane oddaje uczniom na najbliższej lekcji. Ocena z zadania grupowego jest taka sama dla każdego członka zespołu.