Matematyka

Informator
Matura 2024

• sięgnij • zamów • poćwicz • zdaj

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

NASI PRZEDSTAWICIELE

Jeżeli chcielibyście Państwo dowiedzieć się więcej o naszych książkach, to przedstawiciele regionalni Oficyny Edukacyjnej * Krzysztof Pazdro:

- **przyjadą** do Państwa szkoły, aby przedstawić ofertę wydawnictwa
- **dokonają** wśród grona nauczycieli prezentacji podręczników z jednego lub z kilku przedmiotów
- **porozmawiają** indywidualnie z każdym nauczycielem i pomogą w wyborze podręczników
- **udzielą** szczegółowych informacji na temat konferencji i warsztatów organizowanych przez wydawnictwo
- **przedstawią** najkorzystniejsze warunki zakupu publikacji Oficyny.

REGIONY

1

Lubuski
Zachodniopomorski
Pomorski (zachód)
Powiaty: bytowski, chojnicki, człuchowski, kartuski, kościerski, lęborski, pucki, Słupsk, słupski, wejherowski, Gdańsk, Gdynia, Sopot
Wielkopolski (zachód)
Powiaty: czarnkowsko-trzcianecki, grodziski, międzychodzki, nowotomyski, szamotulski, wolsztyński

692-403-384
lubuskie@pazdro.com.pl

2

Dolnośląski
Opolski
Śląski

692-490-546
dolnoslaskie@pazdro.com.pl

3

Wielkopolski
Łódzki
Kujawsko-Pomorski

694-498-275
wielkopolskie@pazdro.com.pl

4

Mazowiecki (północ)
Powiaty: ciechanowski, gostyniński, makowski, mławski, ostrołęcki, Ostrołęka, ostrowski, Płock, płocki, płoński, przasnyski, sierpecki, żuromiński
Podlaski
Warmińsko-Mazurski
Pomorski (wschód)
Powiaty: gdański, kwidzyński, malborski, sztumski, nowodworski, starogardzki, tczewski

694-498-274
mazowieckie@pazdro.com.pl

5

Mazowiecki (centrum)
Powiaty: białobrzeski, garwoliński, grodziski, grójecki, legionowski, łosicki, miński, nowodworski, otwocki, piaseczyński, pruszkowski, pułtuski, Siedlce, siedlecki, sochaczewski, sokołowski, Warszawa, warszawski zachodni, węgrowski, wołomiński, wyszkowski, żyrardowski
Lubelski (północ)
Powiaty: bialski, Biała Podlaska, łukowski, parczewski, radzyński
Podlaski (południe)
Powiat: siemiatycki

666-376-451
warszawa@pazdro.com.pl

6

Lubelski
Podkarpacki
Świętokrzyski
Małopolski
Mazowiecki (południe)
Powiaty: kozienicki, lipski, przysuski, Radom, radomski, szydłowiecki, zwoleński

692-490-544
lubelskie@pazdro.com.pl

Szanowni Państwo,

oto informator o naszych pozycjach wydawniczych z matematyki, które są przeznaczone dla uczniów liceów i techników, przygotowujących się do **matury w 2024 roku**, według zasad obowiązujących od roku szkolnego 2022/2023.

Wybrane fragmenty książek ilustrują zakres i sposób opracowania treści nauczania, ujętych w podstawie programowej obowiązującej w szkołach ponadpodstawowych od września 2019 roku. W poszczególnych pozycjach prezentujemy: okładkę, spis treści, wstęp do książki, przykładowy fragment opracowania treści i odpowiedni fragment odpowiedzi.

Na końcu informatora przedstawiamy kilka pozycji przeznaczonych dla uczniów, nauczycieli i dla tych, którzy szczególnie interesują się matematyką oraz współczesnymi narzędziami informatycznymi, przydatnymi w jej nauczaniu i zastosowaniu.

Gorąco zachęcamy do korzystania z naszej oferty. Jesteśmy przekonani, że pozycje te pomogą uczniom skutecznie przygotować się do matury i osiągnąć sukces podczas egzaminu.

Wydawca

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
tel. 22 560 81 00
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

SPIS TREŚCI INFORMATORA

NOWOŚĆ Matematyka. Zbiór zadań maturalnych. Lata 2010–2023. Poziom podstawowy. 1038 zadań CKE z rozwiązaniami 3

NOWOŚĆ Matematyka. Zbiór zadań maturalnych. Lata 2002–2023. Poziom rozszerzony. 545 zadań CKE z rozwiązaniami 9

NOWOŚĆ Matematyka. Próbne arkusze maturalne. Zestaw 1. i **zestaw 2.** Poziom podstawowy 15

NOWOŚĆ Matematyka. Próbne arkusze maturalne. Zestaw 1. i **zestaw 2.** Poziom rozszerzony 21

GPS w labiryncie matematyki. Zbiór zadań. Zakres podstawowy 27

Typologia zadań maturalnych z matematyki od 2023 r. Poziom podstawowy 33

Matematyka. Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych 39

Sto dowodów matematycznych w dwóch krokach 44

Matematyka w liceum i technikum. Zbiór zadań na 6 49

Mała Olimpiada Matematyczna. Zadania konkursowe z rozwiązaniami. Tom 1. Algebra i tom 2. Geometria 55

Uczniom liceów i techników polecamy także:

Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami 63

Zadania i problemy matematyczne. Zbiór 270 oryginalnych zadań 69

Analiza matematyczna dla licealistów i studentów. Repetytorium 77

Matematyka. Podstawianie zmiennej pomocniczej w równaniach i nie tylko 84

Podróże matematyczne 92

Spacery matematyczne 93

ABC GeoGebry. Poradnik dla początkujących 94

Wolfram Alpha. Praktyczny przewodnik dla każdego 95

format 205 x 292 mm
stron 334

Spis treści

zadania

Wstęp 4
1. Liczby. Potęgi 5
2. Logarytmy 12
3. Procenty 18
4. Wartość bezwzględna 24
5. Równania. Nierówności 29
6. Funkcja liniowa 42
7. Równanie prostej 49
8. Układ równań liniowych 58
9. Funkcja kwadratowa 63
10. Wielomiany i wyrażenia algebraiczne 78
11. Funkcje. Wykresy 84
12. Ciągi 99
13. Trygonometria 112
14. Planimetria 122
15. Stereometria 152
16. Geometria analityczna 175
17. Statystyka 186
18. Kombinatoryka 194
19. Rachunek prawdopodobieństwa 199
20. Dowody (algebra) 208
21. Dowody (geometria) 212
Aneks 219

rozwiązania

1. Liczby. Potęgi 227
2. Logarytmy 230
3. Procenty. Szkice 233
4. Wartość bezwzględna 235
5. Równania. Nierówności 237
6. Funkcja liniowa 243
7. Równanie prostej 245
8. Układ równań liniowych 247
9. Funkcja kwadratowa 249
10. Wielomiany i wyrażenia algebraiczne 254
11. Funkcje. Wykresy 257
12. Ciągi 260
13. Trygonometria 266
14. Planimetria 270
15. Stereometria 287
16. Geometria analityczna 299
17. Statystyka 309
18. Kombinatoryka 312
19. Rachunek prawdopodobieństwa 316
20. Dowody (algebra) 323
21. Dowody (geometria) 326
Odpowiedzi do zadań zaprezentowanych w Aneksie 333

Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie podstawowym jest zdawana na maturze jako przedmiot obowiązkowy. Od tej pory upłynęło już 13 lat. Jest to wystarczający czas, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem zadania z lat 2010–2023, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie podstawowym. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi
(miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Lata 2020–2021 przejdą do historii m.in. z powodu COVID-19 i zdalnego nauczania. Sesja maturalna 2020 też była wyjątkowa, ponieważ odbyła się z miesięcznym przesunięciem. Egzaminy maturalne w latach 2021–2022 zostały przeprowadzone na podstawie nieco zmodyfikowanych podstaw programowych. Sesja maturalna 2023 to arkusze w nowej formule, zbudowane dla pierwszych absolwentów 8-klasowej szkoły podstawowej.

Do zbioru zadań włączono zadania pochodzące z arkuszy maturalnych w terminach dodatkowych (lipiec 2020 i czerwiec 2021 i 2022), z arkuszy matury poprawkowej (wrzesień 2020 i 2021) oraz z arkuszy diagnostycznych i pokazowych (2014, 2021 i 2022).

Matura 2023 to całkiem nowe, niespotykane dotąd, typy zadań maturalnych. Wyniki maturalne okazały się dość wysokie, co nie oznacza, że w 2024 roku będzie podobnie. Chcąc wyjść naprzeciw tej sytuacji, do każdej części tematycznej dołączyłem po 5 zadań nowego typu, a do geometrii płaskiej aż 15 – wszystkie mojego autorstwa.

Zadania z sesji maturalnej 2023 w terminie podstawowym i dodatkowym zostały zapisane na szarym tle.

Aby dodatkowo przybliżyć przyszłym zdającym nową typologię zadań, załączyłem Aneks, w którym można zapoznać się z nowymi typami zadań na bazie arkusza matury dodatkowej 2022. Swego rodzaju „tłumaczenie” wykonał redaktor Tomasz Szwed.

Mam nadzieję, że ten bardzo bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu. Niech przyszli zdający nie boją się nowej, na pewno innej matury z matematyki. Starajcie się zrozumieć treści matematyczne. I po prostu ćwiczcie.

Ryszard Pagacz

ZADANIA

Zadanie 1.40. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 6. (2 pkt)]

Dana jest liczba $x = a - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$, gdzie a należy do zbioru $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych.

W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$ **B.** $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **C.** $a = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 0{,}3$

D. $a = 6$ **E.** $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$ **F.** $a = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{6}$

G. $a = -\sqrt{6}$

Zadanie 1.41. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 1. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość wyrażenia $6^{100} + 6^{100} + 6^{100} + 6^{100} + 6^{100} + 6^{100}$ jest równa

A. 6^{600} **B.** 6^{101} **C.** 36^{100} **D.** 36^{600}

Zadanie 1.42. [test diagnostyczny CKE, wrzesień 2022, zadanie 1. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\left(1 + 3 \cdot 2^{-1}\right)^{-2}$ jest równa

A. $\frac{25}{4}$ **B.** $\frac{4}{25}$ **C.** $\frac{36}{49}$ **D.** $\frac{40}{9}$

Zadanie 1.43. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 1. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ jest równa

A. $\sqrt[6]{5}$ **B.** $\sqrt[3]{25}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt[3]{5}$

Zadanie 1.44. [matura, maj 2023, zadanie 2. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\left(-\frac{3}{2}\right)$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\left(-\frac{2}{3}\right)$

Zadanie 1.45. [matura, czerwiec 2023, zadanie 2. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x iloczyn $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ jest równy

A. x **B.** $\sqrt[10]{x}$ **C.** $\sqrt[18]{x}$ **D.** x^2

Zadanie 1.46. [matura, czerwiec 2023, zadanie 6. (1 pkt)]

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(1-\sqrt{5}\right)^2$ jest równa

A. 0 **B.** (-10) **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $2+2\sqrt{5}$

Zadania dodatkowe

Zadanie D1.1. (1 pkt)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Liczba $3^{33}+3^{33}+3^{33}$ jest równa 9^{17}.	**P**	**F**
2.	Odwrotnością liczby $2+\sqrt{5}$ jest liczba $2-\sqrt{5}$.	**P**	**F**

Zadanie D1.2. (1 pkt)

Wybierz zdanie prawdziwe **A, B** albo **C** oraz zdanie **1., 2.** albo **3.** uzasadniające takie stwierdzenie.

A.	Liczba $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest dodatnia.	**1.**	$\frac{1}{1-\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=2$.
B.	Liczba $\frac{1}{1-\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną.	**2.**	Liczby $\frac{1}{1+\sqrt{2}},\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ są dodatnie.
C.	Liczba $\frac{1}{1-\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ jest ujemna.	**3.**	Liczba $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest ujemna oraz liczba $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ jest dodatnia.

Zadanie D1.3. (2 pkt)

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba $\sqrt{8\sqrt{8}}$ <u>nie jest równa</u> liczbie a dla

A. $a=2\sqrt{\sqrt{2}}$ **B.** $a=4\sqrt{\sqrt{2}}$ **C.** $a=2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}$

D. $a=4^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{8}}$ **E.** $a=4^{\frac{9}{8}}$ **F.** $a=2^{\frac{9}{4}}$ **G.** $a=2^{\frac{7}{4}}$

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
1.33	$\sqrt[4]{9\cdot\sqrt{3}}=\left(3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{5}{8}}$	**A**
1.34	$\left(\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{4}}=b^{0,25}$	**B**
1.35	$(-\infty,\ 5)\cap\langle -1,\ +\infty)=\langle -1,\ 5)$, liczby całkowite: –1, 0, 1, 2, 3, 4	**A**
1.36	$\left(7^{\frac{5}{4}}\cdot 7^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(7^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=7^1$	**B**
1.37	$2021:\left(1-\frac{1}{2022}\right)-\left(1-\frac{2022}{2021}\right):\frac{1}{2021}=2021\cdot\frac{2022}{2021}-\frac{-1}{2021}\cdot\frac{2021}{1}=2023$	**D**
1.38	$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=1+\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.39	$\frac{a\cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a\cdot b=\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=1$	**1**
1.40	$x=a-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=a-5+2\sqrt{6}\in Q\Leftrightarrow a+2\sqrt{6}\in Q$ $C.\ a+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+0,3+2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}+0,3+2\sqrt{6}=5,3\in Q$ $E.\ a+2\sqrt{6}=-2\sqrt{6}+12,5+2\sqrt{6}=12,5\in Q$	**C** **E**
1.41	$6^{100}+6^{100}+6^{100}+6^{100}+6^{100}+6^{100}=6\cdot 6^{100}=6^{101}$	**B**
1.42	$\left(1+3\cdot 2^{-1}\right)^{-2}=\left(1+\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{25}$	**B**
1.43	$\left(5\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$	**C**
1.44	$\sqrt[3]{-\frac{27}{16}}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=-\frac{3}{2}$	**A**
1.45	$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^1=x$	**A**
1.46	$\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(1-\sqrt{5}\right)^2=\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}$	**C**

ROZWIĄZANIA

format 205 x 292 mm
stron 320

Spis treści

zadania

Wstęp 4
1. Funkcja kwadratowa 5
2. Wielomiany 10
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne 14
4. Trygonometria 18
5. Wartość bezwzględna 22
6. Ciągi 25
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego 29
8. Planimetria 34
9. Stereometria 40
10. Geometria analityczna 48
11. Kombinatoryka 56
12. Rachunek prawdopodobieństwa 58
13. Dowody algebra 63
14. Dowody geometria 67
15. Granice. Pochodna 74
16. Optymalizacja 80
17. Inne 88

rozwiązania

1. Funkcja kwadratowa 89
2. Wielomiany 107
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne 116
4. Trygonometria 123
5. Wartość bezwzględna 140
6. Ciągi 148
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego 158
8. Planimetria 166
9. Stereometria 184
10. Geometria analityczna 206
11. Kombinatoryka 237
12. Rachunek prawdopodobieństwa 244
13. Dowody algebra 258
14. Dowody geometria 268
15. Granice. Pochodna 282
16. Optymalizacja 291
17. Inne 318

Wstęp

W zbiorze zebrałem zadania z lat 2002–2023, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie rozszerzonym. Są tu zadania pochodzące z egzaminów maturalnych w terminach głównych i dodatkowych, z egzaminów próbnych przygotowanych przez CKE, z diagnozy przedmaturalnej z lat 2020–2022, z informatora o egzaminie maturalnym z matematyki z roku 2021, z arkusza pokazowego z roku 2022 oraz z arkuszy z sesji 2023. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów).

Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań.

Zadania z sesji maturalnej 2023 w terminie podstawowym i dodatkowym zostały zapisane na szarym tle.

Ten zbiór zadań może być dobrym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

Ryszard Pagacz

Zadanie 3.20. [matura, maj 2023, zadanie 1. (2 pkt)]

W chwili początkowej $(t = 0)$ masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama. Zapisz obliczenia.

4. Trygonometria

Zadanie 4.1. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 15. (4 pkt)]

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.2. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 16. (7 pkt)]

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1)\cdot(\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$ jest parametrem.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0, 5\rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zadanie 4.3. [matura, styczeń 2006, zadanie 15. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie: $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

Zadanie 4.4. [matura, maj 2008, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Zadanie 4.5. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 10. (4 pkt)]

Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.

Zadanie 4.6. [matura, maj 2010, zadanie 2. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Zadanie 4.7. [matura, sierpień 2010, zadanie 1. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Zadanie 4.8. [matura, maj 2011, zadanie 4. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.9. [matura, czerwiec 2011, zadanie 4. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.10. [matura, maj 2012, zadanie 3. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

Zadanie 4.11. [matura, czerwiec 2012, zadanie 3. (5 pkt)]
Kąt α jest taki, że $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$.

Zadanie 4.12. [matura, maj 2013, zadanie 4. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.13. [matura, czerwiec 2013, zadanie 3. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $2\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.14. [matura, czerwiec 2013, zadanie 8. (3 pkt)]
Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$

Zadanie 4.15. [matura, maj 2014, zadanie 3. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.16. [matura, czerwiec 2014, zadanie 4. (4pkt)]
Rozwiąż nierówność $-2\sin 3x \geq 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.17. [próbna matura, grudzień 2014, zadanie 11. (3 pkt)]
Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

Zadanie 4.18. [matura, maj 2015, zadanie 5. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.19. [matura, czerwiec 2015, zadanie 10. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.

Zadanie 4.20. [matura, czerwiec 2015, zadanie 3. (4 pkt)]
Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\frac{-2x^2 - x + 15}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$$

$$(-2x+5)(x+3)(x-2)(x+2) \geqslant 0$$

Odp. $x \in [-3, -2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$.

Zadanie 3.20.

$$m(t) = 4 \cdot \left(\frac{81}{100}\right)^t$$

Funkcja $m(t)$ jest funkcją malejącą.

$$4 \cdot (0{,}81)^4 > 1{,}7 > 1{,}5$$

$$4 \cdot (0{,}81)^5 < 1.4 < 1{,}5$$

Odp. Po pięciu dobach.

4. Trygonometria

Zadanie 4.1.

$$f(x) = \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) =$$

$$2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{6} - 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6} + 2x}{2}\right) =$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

Zbiorem wartości funkcji $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$, zatem najmniejszą wartością funkcji f jest $-\sqrt{3}$, natomiast największą $\sqrt{3}$.

Odp. Najmniejsza wartość $-\sqrt{3}$, największa wartość $\sqrt{3}$.

Zadanie 4.2.

Równanie $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$ jest równoważne alternatywie równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = -p - 1$.

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby $2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

ROZWIĄZANIA

format 205 x 292 mm
stron 120

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl

Spis treści

Wstęp 4

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 5

2. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 23

3. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 41

4. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 58

5. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 77

6. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym 97

Odpowiedzi i szkice rozwiązań 114

Wstęp

O egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 roku na pewno można powiedzieć dwie rzeczy: będzie inny i będzie trudniejszy. Jego inność wynika z faktu, że pojawią się nowe typy zadań maturalnych. Do tej pory na poziomie podstawowym mieliśmy trzy typy zadań, od 2023 roku ma ich być co najmniej trzynaście. Trudność arkusza maturalnego może wynikać z faktu różnorodności typów zadań oraz ich pojawiania się w arkuszu. Od 2010 roku zadania były poukładane typami, od 2023 będą poukładane zgodnie z kolejnością występowania treści i wymagań w podstawie programowej. Jest to nowa sytuacja, do należy się dobrze przygotować. W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności.

Nasza propozycja to zestaw sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie podstawowym. Każdy arkusz jest inny, każdy następny jest trudniejszy od poprzedniego. Ponieważ nie ma wielu wzorców prawdziwej matury 2023, dlatego nasze arkusze są tak naprawdę naszą wizją tej matury. Tak to sobie wyobrażamy. Mamy za sobą lekturę dokumentów CKE, ORE oraz wiele rozmów z nauczycielami zaangażowanymi w doradztwo metodyczne. Staraliśmy się uważnie słuchać i czytać. Nasz zestaw arkuszy zawiera ponad 180 zadań różnego typu i treści. Nie baliśmy się uruchomić naszej wyobraźni. Zrobiliśmy to jednak mając na uwadze komfort i bezpieczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki od 2023 roku. Mamy nadzieję, że oryginalny arkusz opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną będzie mniej skomplikowany i dużo łatwiejszy niż nasze propozycje. Mamy nadzieję, ale jednocześnie chcemy się przygotować na mniej optymistyczny scenariusz. Dlatego zachęcamy naszych Czytelników, Uczniów i Nauczycieli, do rzetelnej pracy w oparciu o nasz materiał ćwiczeniowy.

Każde zadanie ma zamieszczoną w drugiej części książki odpowiedź, do każdego zadania otwartego dołączyliśmy również jego pełne rozwiązanie. Mamy nadzieję, że pomoże to Uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Zespół Autorów

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{6^7 \cdot 7^6}{42^5}$ jest równa

A. $6 \cdot 7^2$ **B.** $7 \cdot 6^3$ **C.** $7 \cdot 6^2$ **D.** 42^8

Brudnopis

Zadanie 2. (0-1)

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych C i D.

Wartość wyrażenia $\log_3 15 + \log_3 5$ jest liczbą [A|B]

Wartość wyrażenia $81^{\log_3 4}$ jest liczbą naturalną [C|D]

A. mniejszą od 4 **B.** większą od 4

C. dwucyfrową **D.** trzycyfrową

Brudnopis

Zadanie 3. (0-1)

Cena litra benzyny po kolejnych dwóch podwyżkach, za każdym razem o 12% w porównaniu do aktualnej ceny, jest równa 7,53 zł (w zaokrągleniu do pełnych groszy).

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cena benzyny przed obiema podwyżkami była równa

A. 6,20 zł **B.** 5,90 zł **C.** 6,00 zł **D.** 6,27 zł

Brudnopis

Zadanie 4. (0-1)

Spośród zbiorów A–D wskaż ten, który poprawnie opisuje zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność:

$$|x - 5| > 4$$

A. $(1, 9)$ **B.** $(-9, -1)$ **C.** $(-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$ **D.** $(-\infty, -9) \cup (-1, +\infty)$

Brudnopis

Zadanie 5. (0-2)

Rozważmy układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 3x - 5 = y \\ y + x = 7 \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb (x, y) spełniająca zależność

A. $xy = 12$ **B.** $x + 1 < y - 3$ **C.** $3x + 5y = 30$ **D.** $x^2 - y^2 = 7$

E. $x^2 - y = 6$ **F.** $x + y^2 = 21$ **G.** $y - x = 1$

Brudnopis

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość kwadratu wyrażenia $(5 - 3x)(5 + 3x)$ jest równa

A. $25 - 9x^2$ **B.** $25 + 9x^2$ **C.** $625 - 81x^4$ **D.** $625 - 450x^2 + 81x^4$

Brudnopis

Odpowiedzi i szkice rozwiązań

Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie podstawowym

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	16	17
C	AD	C	C	AG	D	B	DE	1C, 2A, 3B, 4D	B	C	D	BG

18	19	20	21.1	21.2	23	25	27	28	30
C	BF	AG	BC	FF	A3	BF	FF	C	AE

Odpowiedzi i rozwiązania zadań otwartych

Zadanie 9. Odpowiedź: a) (-2) b) $(4, 8)$

Zadanie 13. Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{1}{5}, 3\right)$

Rozwiązanie:

$6x^2 - 5x - 7 < x^2 + 9x - 4$

$5x^2 - 14x - 3 < 0$

$\Delta = 16;\ x_1 = -\frac{1}{5};\ x_2 = 3$

$x \in \left(-\frac{1}{5}, 3\right)$

Zadanie 14. Odpowiedź: Prostokąt ma wymiary 25 × 25 i jego największe pole jest równe 625.

Rozwiązanie:

$2x + 2y = 100$, czyli $x + y = 50$ (y oznacza długość drugiego boku prostokąta).

$P(x) = x(50 - x)$, gdzie $x \in (0, 50)$.

Funkcja pola $P(x) = 50x - x^2$ osiąga wartość największą dla $x = 25$.

Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 25 × 25, a jego pole jest równe 625.

Zadanie 15.

Rozwiązanie:

Nierówność $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ przekształcimy równoważnie:

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow ab \geqslant \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow ab(a+b)^2 \geqslant 4a^2b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab\left(a^2+2ab+b^2\right)-4a^2b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^3b+2a^2b^2+ab^3-4a^2b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3b-2a^2b^2+ab^3\ 0 \Leftrightarrow ab\left(a^2-2ab+b^2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow ab(a-b)^2 \geqslant 0$$

Otrzymana nierówność jest zawsze prawdziwa, wobec tego prawdziwa jest też nierówność $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

format 205 x 292 mm
stron 120

Sprawdź dostępność na:
www.pazdro.com.pl

Spis treści

Wstęp 4

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 5

2. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 18

3. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 27

4. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 36

5. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 47

6. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym 58

Odpowiedzi i szkice rozwiązań 69

Wstęp

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym nie będzie zbytnio odbiegał od egzaminu jaki znamy do tej pory. Nie będzie zadań testowych ani zadań z kodowaną odpowiedzią. Pojawią się wiązki zadań oraz zadania osadzone w kontekście realistycznym. Nie będzie takiej różnorodności typów zadań jak na poziomie podstawowym. Zdający w czasie 180 minut będzie miał do rozwiązania nieco ponad 10 zadań otwartych.

W przygotowaniu do matury z matematyki przede wszystkim należy postarać się dobrze zrozumieć treści matematyczne i dobrze wyćwiczyć podstawowe umiejętności. To wymaga czasu, zaangażowania, samodzielnej pracy, również pracy w zespole, i przede wszystkim decyzji: chcę i będę się uczyć. Od liczby samodzielnie rozwiązanych zadań i od ich jakości zależy ostateczny wynik maturalny.

Mając to na uwadze przygotowaliśmy zestaw sześciu przykładowych arkuszy typu maturalnego na poziomie rozszerzonym. Chcieliśmy zapewnić różnorodność w kwestii sformułowań i trudności zadań, dlatego arkusze ułożyliśmy w zespole trzech Autorów, doświadczonych, ale i różnie postrzegających rzeczywistość szkolną uczniów uczących się matematyki w zakresie rozszerzonym i deklarujących chęć zdawania matury na poziomie rozszerzonym.

Do każdego zadania dołączyliśmy jego pełne rozwiązanie oraz propozycję punktacji. Mamy nadzieję, że pomoże to Uczniom samodzielnie przygotowującym się do egzaminu.

Zespół Autorów

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1. (0-3)

Dane są liczby $a = \log_2 45$ i $b = \log_2 5$.

Zapisz $\log_2 48$ **używając liczb** a **i** b**.**

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)

Wyznacz zbiór wszystkich liczb całkowitych spełniających nierówność $\left||x-1|-3\right| < 2$.

Zadanie 3.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$, dla każdej liczby rzeczywistej.

Zadanie 3.1. (0-2)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.2. (0-2)

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej (-2).
Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-4)

Ustawiamy cztery liczby, jedna za drugą. Trzy początkowe tworzą ciąg geometryczny, a trzy końcowe – ciąg arytmetyczny.
Suma liczb pierwszej i ostatniej jest równa 14, a suma drugiej i trzeciej jest równa 12.
Wyznacz te liczby.
Zapisz obliczenia.

Odpowiedzi i szkice rozwiązań

Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

1. próbny arkusz maturalny 2023 na poziomie rozszerzonym – szkice rozwiązań

Zadanie 1. Odpowiedź: $\log_2 48 = \frac{8+a-b}{2}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $a = \log_2 45 = \log_2(9 \cdot 5) = \log_2 9 + \log_2 5 = 2\log_2 3 + b$.

Wobec tego $a = 2\log_2 3 + b$, czyli $\log_2 3 = \frac{a-b}{2}$.

Mamy zatem $\log_2 48 = \log_2(16 \cdot 3) = \log_2 16 + \log_2 3 = 4\log_2 2 + \log_2 3 = 4 + \log_2 3$.

Ostatecznie otrzymamy:

$\log_2 48 = 4 + \log_2 3 = 4 + \frac{a-b}{2} = \frac{8+a-b}{2}$.

Punktacja

1) Doprowadzenie do postaci $\log_2 3 = \frac{a-b}{2}$ (1 p).

2) Doprowadzenie do postaci $\log_2 48 = 4 + \log_2 3$ (1 p).

3) Doprowadzenie do postaci ostatecznej $\log_2 48 = \frac{8+a-b}{2}$ (1 p).

Zadanie 2. Odpowiedź: $\{-3, -2, -1, 3, 4, 5\}$

Rozwiązanie

Nierówność $\big||x-1|-3\big| < 2$ można zapisać w postaci:

$$|x-1|-3 < 2 \text{ i } |x-1|-3 > -2, \text{ czyli } |x-1| < 5 \text{ i } |x-1| > 1.$$

Po rozwiązaniu nierówności otrzymamy sumę przedziałów: $(-4, 0) \cup (2, 6)$.

W zbiorze $(-4, 0) \cup (2, 6)$ znajdują się następujące liczby całkowite: $-3, -2, -1, 3, 4, 5$.

Punktacja

1) Zapisanie nierówności w postaci $|x-1| < 5$ i $|x-1| > 1$ (1 p).

2) Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in (-4, 0) \cup (2, 6)$ (1 p).

3) Poprawny wybór liczb całkowitych ze zbioru rozwiązań nierówności (1 p).

Zadanie 3. Odpowiedź: $-4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ $\quad y = -7x - 12$

Rozwiązanie

Grupując wyrazy otrzymujemy: $x^3 + 4x^2 - 3x - 12 = (x+4)(x^2-3) = (x+4)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

Miejscami zerowymi funkcji wielomianowej f są liczby: $-4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Obliczając pochodną funkcji wielomianowej f otrzymamy: $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Zauważmy, że: $x_0 = -2$, $f(-2) = 2$ oraz $f'(-2) = -7$.

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej (-2) ma równanie:

$y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$, czyli $y - 2 = -7(x + 2)$.

Zatem ostatecznie otrzymujemy: $y = -7x - 12$.

format 205 x 292 mm
stron 160

SPIS TREŚCI

Wstęp 5
Instrukcja dla korzystających z GPS 7
CZĘŚĆ PIERWSZA
Zadania odpowiadające maturalnym wymaganiom egzaminacyjnym
od roku 2023, zgodne z wcześniejszą podstawą programową 9
CZĘŚĆ DRUGA
Zadania uzupełniające do zadań pierwszej części pod kątem
nowych wymagań egzaminacyjnych, obowiązujących w latach 2023–2024 35
CZĘŚĆ TRZECIA
Zadania pomocne w przygotowaniu się do matury z matematyki
według nowej formuły od roku 2023 83
ODPOWIEDZI
Odpowiedzi do części pierwszej 129
Odpowiedzi do części drugiej 138
Odpowiedzi do części trzeciej 156

WSTĘP

Niniejszy zbiór zadań jest skierowany przede wszystkim do tych uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki.

Zbiór ten, z założenia, ma być wsparciem dla uczniów i nauczycieli w procesie nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Zawiera on zestaw zadań bazowych, które są odzwierciedleniem wymagań szczegółowych, zapisanych w podstawie programowej. Dodatkowo pod każdym zadaniem bazowym zamieszczono ćwiczenia, które przedstawiają w różnych aspektach zagadnienia odnoszące się do tego zadania. Taka konstrukcja zbioru umożliwia uczniom utrwalenie i doskonalenie elementarnych umiejętności matematycznych poprzez wielokrotne rozwiązywanie tych samych zadań, z dokładnością do zmiany danych liczbowych.

Zbiór składa się z trzech części.

Część pierwsza powstała w odpowiedzi na zapotrzebowanie nauczycieli przygotowujących uczniów, którzy mają duże trudności z nauką matematyki, do egzaminu maturalnego w roku 2022 na poziomie podstawowym. Dlatego zwrócono uwagę głównie na te umiejętności, które są niezbędne w rozwiązywaniu zadań zamkniętych i zadań krótkiej odpowiedzi, z wyjątkiem zadań na dowodzenie.

Część druga jest utrzymana w tym samym stylu i stanowi uzupełnienie części pierwszej o zadania odpowiadające wymaganiom egzaminacyjnym egzaminu maturalnego w latach 2023–2024. W tej części również nie uwzględniono zadań otwartych na dowodzenie. Ze względu na założone cele, położono akcent na zrozumienie podstawowych pojęć matematycznych i osiągnięcie wysokiej sprawności rachunkowej.

Część trzecia zawiera zadania, których dotychczas nie było na egzaminie maturalnym. Typy tych zadań wprowadza *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od 2023 r. na poziomie podstawowym* oraz arkusz pokazowy, opublikowany przez CKE. Są to zadania typu: „prawda – fałsz", na dobieranie, wielokrotnego wyboru oraz „z luką".

Do zadań zamieszczonych w każdej części zbioru podano odpowiedzi, tak aby uczeń rozwiązujący samodzielnie zadania mógł zweryfikować wynik.

Autorzy

CZĘŚĆ TRZECIA

Zadania pomocne w przygotowaniu się do matury z matematyki według nowej formuły od roku 2023

I. LICZBY RZECZYWISTE

Zadanie 1. (1 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt[3]{-3}$ i $b = \sqrt[3]{-2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań; zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $2a + 3b$ jest liczbą ujemną.	**P**	**F**
Liczba $\sqrt{-3a^3}$ jest liczbą wymierną.	**P**	**F**

Zadanie 2. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt{27}$, $b = \sqrt[6]{27}$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

2.1	Iloraz liczby a przez liczbę b jest równy	
2.2	Iloczyn liczb a i b jest równy	

A. 1 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 27

Zadanie 3. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \sqrt{25} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{27}$ oraz $b = \dfrac{10}{\sqrt[3]{-125}} + 3$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

3.1	Liczba a jest liczbą	
3.2	Liczba b jest liczbą	

A. niewymierną **B.** pierwszą **C.** nieparzystą **D.** parzystą

Zadanie 4. (1 pkt)

Uzupełnij poniższe zdania; wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $\sqrt{16} - \sqrt[3]{-8} + \sqrt{8}$ jest liczbą **A** / **B**.

A. wymierną **B.** niewymierną

Wartość wyrażenia $\dfrac{-4}{\sqrt[3]{a}} + 1$ jest liczbą ujemną dla **C** / **D**.

C. $a = -64$ **D.** $a = 27$

Zadanie 5. (2 pkt)

Dane są liczby $a = \left|\left(\sqrt{16}-3\right)\left(\sqrt{16}+3\right)\right|$ i $b = \left|\sqrt{5}-3\right|$.

Dokończ zdanie; wybierz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczby a i b spełniają warunek

A. $a+b = 10+\sqrt{5}$ **B.** $a-b = 4+\sqrt{5}$

C. $a\cdot b = 21+7\sqrt{5}$ **D.** $a+b = 4+\sqrt{5}$

E. $a\cdot b = 21-7\sqrt{5}$

Zadanie 6. (1 pkt)

Dane są liczby $a = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt[3]{3}\right)^3$ i $b = -4\sqrt{2}$.

Porównaj liczby *a* i *b*, uzupełnij zdanie, tak aby było prawdziwe.

Liczba a jest . . . . . od liczby b.

Zadanie 7. (1 pkt)

Dane są liczby $x = 3+\sqrt{5}$ i $y = 6\sqrt{5}$

Uzupełnij zdanie; wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowane miejsce, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wyrażenia $x^2 - y$ jest równa . . . . . .

Zadanie 8. (2 pkt)

Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$, $b = \frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$, $c = 3^{\frac{5}{4}}$, $d = \frac{3}{\sqrt[4]{27}}$ oraz $e = 3^{-\frac{1}{4}}$.

Dokończ zdanie; wybierz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prawdziwa jest równość:

A. $e = a$ **B.** $e = b$ **C.** $e = c$ **D.** $e = d$ **E.** $a = 3c$ **F.** $c = 3d$

Zadanie 9. (2 pkt)

Dokończ zdanie; wybierz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ jest

A. liczbą niewymierną. **B.** równa -1. **C.** równa $1-\sqrt{8}$.

D. liczbą całkowitą. **E.** równa $\sqrt{2}-2$. **F.** równa $\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2}{2}$.

Zadanie 10. (1 pkt)

Dane są liczby $a = 1-2\sqrt{5}$ i $b = -4\sqrt{5}$.

Czy liczba $a^2 - b$ jest wymierna? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$1^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = -19.$
			2.	$21 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 21.$
B.	Nie,		**3.**	$1^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 + 4\sqrt{5} = 21 + 4\sqrt{5}.$

Zadanie 11. (1 pkt)

Dane są liczby $a = 2\sqrt[3]{3}$ i $b = \sqrt[3]{-24}$.

Czy liczba $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-24}$ jest równa 0? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	liczba b jest liczbą przeciwną do liczby a.
			2.	iloczyn liczb b i a jest liczbą ujemną.
B.	Nie,		**3.**	różnica liczb $a - b$ jest liczbą dodatnią.

Zadanie 12. (1 pkt)

Dane są liczby $a = \dfrac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^{-2}}$ i $b = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3^{-2}}$.

Uzupełnij zdanie; wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowane miejsce, tak aby zdanie było prawdziwe.

Liczba a jest o . . . . . mniejsza od liczby b.

Zadanie 13. (2 pkt)

Dana jest liczba $a = \dfrac{63^4}{3^8 \cdot 7^3}$.

Uzupełnij tabelę; do każdego z poniższych sformułowań dobierz właściwe dokończenie spośród A–D, tak aby utworzone zdanie było prawdziwe.

13.1	Liczba $(a-5)^2$ jest równa	
13.2	Liczba $a^2 - 6^2$ jest równa	

A. 1 **B.** 4 **C.** 13 **D.** 24

Zadanie 14. (1 pkt)

Dane jest wyrażenie $\dfrac{2^{26} + 2^{27} + 2^{28}}{\left(2^7 + 2^7\right)^3}$.

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 7? Wybierz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	liczba 2^{26} nie jest podzielna przez 7.
			2.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $7 \cdot 2^2$.
B.	Nie,		**3.**	wykładnik potęgi 2^{28} jest podzielny przez 7.

101a) baza 2 a1) 2 a2) 5 a3) 8

b) baza 1 oraz 4 b.1) 1,2 oraz 5,4 b.2) 6 oraz 8 b.3) 1, 5, 6

c) baza 2, 3, 4, 7, 8 c.1) 8, 9, 10, 15 c.2) 5, 12 c.3) 3

102) baza $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

102.1) $\sqrt{\frac{14}{3}}$ **102.2)** $\sqrt{\frac{12}{7}}$ **102.3)** $\sqrt{\frac{12}{7}}$ **102.4)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **102.5)** $\sqrt{\frac{478}{75}}$

103) baza $\sqrt{\frac{6}{5}}$, 4 **103.1)** $\sqrt{\frac{46}{15}}$, 4 **103.2)** $\sqrt{\frac{9}{5}}$, 3 **103.3)** $\sqrt{\frac{18}{5}}$, 5

104) baza $x = 5, \sqrt{\frac{26}{7}}$ **104.1)** $x = 1, \sqrt{\frac{17}{5}}$ **104.2)** $x = 9, \sqrt{10}$ **104.3)** $x = 3, \sqrt{\frac{12}{5}}$

ODPOWIEDZI DO CZĘŚCI TRZECIEJ

I. LICZBY RZECZYWISTE

1. P, P **2.1** B **2.2** C **3.1** A **3.2** C **4.** B, D **5.** B, E

6. Liczba a jest mniejsza od liczby b

7. Wartość wyrażenia $x^2 - y$ jest równa 14.

8. A, F **9.** B, D **10.** TAK, 2 **11.** TAK, 1

12. Liczba a jest o 49 mniejsza od liczby b **13.1** B **13.2** C

14. TAK, 2

15.1 B **15.2** A **16.** B, E **17.** A, D **18.** TAK, 2

19.1 C **19.2** D **20.** Nie, 3 **21.**TAK, 2 **22.** F, P

23. B, C **24.** NIE, 3 **25.1** B **25.2** C **26.** F, P

27. Do zbioru rozwiązań tej nie należą następujące liczby naturalne: 2, 3, 4

28.1 B **28.2** C **29.** B, D **30.** TAK, 1

II. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

31.1 C **31.2** A **32.1** C **32.2** D **33.** B, C

34. P, P **35.** A, C **36.** B, F **37.** P, F

38. Pierwiastkami wielomianu $H(x)$ są liczby $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. **39.** P, F **40.** F, P

41. B, D **42.** Dla $x = \sqrt{3}$ wartość wielomianu jest równa $4\sqrt{3}$.

43. P, P **44.** P, F **45.** P, F **46.1** A **46.2** B **47.** B, E **48.** A, F

49. Wartość wyrażenia dla $x = 2\sqrt{2}$ jest większa od wartości tego wyrażenia dla $x = 3\sqrt{2}$.

format 165 x 235 mm
stron 160

Spis treści

Wstęp 5
1. Liczby i działania na nich 7
2. Logarytmy i obliczenia procentowe 13
3. Wyrażenia algebraiczne 18
4. Wartość bezwzględna i własności funkcji 24
5. Funkcja liniowa 33
6. Równania, nierówności 43
7. Własności funkcji kwadratowej 49
8. Nierówności kwadratowe 56
9. Wielomiany 62
10. Wyrażenia wymierne, równania wymierne 69
11. Ciągi liczbowe 75
12. Ciąg arytmetyczny i geometryczny 82
13. Planimetria cz. 1. Pola i obwody figur 89
14. Planimetria cz. 2. Twierdzenie cosinusów, twierdzenie o stycznej 95
15. Planimetria cz. 3. Kąty w kole i twierdzenia Talesa 102
16. Trygonometria 111
17. Geometria analityczna 117
18. Stereometria 123
19. Statystyka 129
20. Kombinatoryka 134
21. Rachunek prawdopodobieństwa 140
Odpowiedzi 146

Wstęp

Oddajemy do rąk Uczniów i Nauczycieli *Typologię zadań maturalnych*. Jakie są podstawy takiego podejścia do zadań i arkusza maturalnego od 2023 roku? Zacznijmy od początku.
W arkuszu egzaminacyjnym będzie od 29 do 40 zadań, znajdą się w nim się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte. Będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Będzie co najmniej 13 typów zadań! (do 2022 roku były tylko 3).
Oto wykaz typów zadań maturalnych na poziomie podstawowym.

1. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D
2. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedno uzasadnienie tej odpowiedzi spośród 1.–3. (Ale tabelka może mieć różne rozmiary, np. 2 × 2, 2 × 3).
3. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–F.
4. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–G.
5. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedną odpowiedź spośród D–F.
6. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D oraz wybiera jedną odpowiedź spośród E–H.
7. Zdający ocenia prawdziwość zdań (lub dokończeń zdań).
8. Zdający dobiera/przyporządkowuje/zestawia odpowiedź (spośród podanych) do określonych sytuacji/obiektów/elementów.
9. Zadanie otwarte za 1 punkt. … wykropkowane z miejscem do uzupełnienia lub krótkie zadanie.
10. Zadanie otwarte za 2 punkty.
11. Zadanie otwarte za 3 punkty.
12. Zadanie otwarte za 4 punkty.
13. WIĄZKA. Wiązka zadań to **zestaw od dwóch do czterech zadań** występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać **niezależnie** od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań **może** się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Bardzo nam zależy, aby *Typologia zadań maturalnych* stała się bazą do ćwiczeń i okazją do oswojenia się z tak dużą różnorodnością zadań. W naszym przekonaniu właśnie taka różnorodność sprawia, że matura z matematyki od 2023 **będzie egzaminem innym i dużo trudniejszym**.

Zespół autorski

10. Wyrażenia wymierne, równania wymierne

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{x-2}{x+4}$ jest zbiór

A. $R \setminus \{2\}$ **B.** $R \setminus \{-4\}$ **C.** $R \setminus \{-4, 2\}$ **D.** $R \setminus \{0\}$

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli $k=\sqrt{7}+3$, to wartość wyrażenia $\frac{k^2-9}{k+3}$ dla $k \neq -3$ jest równa

A. $\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{7}-6$ **C.** $\sqrt{7}+6$ **D.** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+6}$

Zadanie 3. (0-2)

Dane są liczby x i y, takie że $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{y}$.

Zadanie 4. (0-2)

Liczba x jest rozwiązaniem równania $\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{3}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Rozwiązaniem równania jest:

A. $x=-15$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=(-1)^2$ **D.** $x=15$

E. $x=\sqrt{225}$ **F.** $x=-1^2$ **G.** $x=-\sqrt{225}$ **H.** $x=1$

Zadanie 5. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Równanie $\frac{x^2-1}{x-1}=0$ ma dokładnie dwa rozwiązania.	**P**	**F**
2.	Równanie $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.	**P**	**F**

Zadanie 6. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dane jest równanie z niewiadomą x i z parametrem m: $\frac{x-m+1}{x+m}=0$.

1.	Dla $m=1$ dziedziną równania jest $R \setminus \{1\}$.	P	F
2.	Dla $m=0$ dziedziną równania jest $R \setminus \{0\}$.	P	F

Zadanie 7. (0-3)

Połącz równanie ze zbiorem jego rozwiązań, wpisz w puste miejsca odpowiednią literę

I. $\frac{x^2-4x+4}{x-2}=0$

II. $\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$

III. $\frac{x^2-4}{x^2+4}=0$

A. R

B. $R \setminus \{-2\}$

C. $\{-2, 2\}$

D. $\varnothing$

I – . . . . . II – . . . . . III – . . . . . .

Zadanie 8. (0-2)

Rozważmy równanie $\frac{x^2-2x}{x-2}=1$.

Liczba a to największa liczba całkowita spełniająca podane równanie.
Liczba b jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą to równanie.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.
Liczba a jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** 4

Liczba b jest równa

E. 0 **F.** 1 **G.** 2 **H.** -2

Zadanie 9. (0-1)

Dana jest równość $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{a}=0$, dla pewnego $a \neq 0$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Liczba a jest równa:

A.	$a=-9$	ponieważ	**1.**	$\frac{1}{a}=\frac{-9}{20}$
B.	$a=\frac{-20}{9}$		**2.**	$\frac{1}{a}=\frac{-1}{9}$
C.	$a=\frac{-9}{20}$		**3.**	$\frac{1}{a}=\frac{-20}{9}$

Zadanie 10. (0-2)

Udowodnij, że żadna liczba wymierna nie spełnia równania $\frac{2x^2-4x+5}{x-1}=3x+5$.

Zadanie 11. (0-2)

Rozwiąż równanie: $\frac{2x-11}{x-1}=5$

Zadanie 12. (0-2)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Równanie $\frac{x-2}{x+2}=x-2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=-1$	**P**	**F**
2.	Równanie $\frac{x-2}{x+2}=x-2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=2$	**P**	**F**
3.	Równanie $\frac{x-2}{x+2}=x-2$ ma dokładnie dwa rozwiązania $x=-1$, $x=2$	**P**	**F**

20. $m = 3\sqrt{5} - 8$ **21.** $k = 3$, $m = 2$ **22.** $3x^3 + 2x^2 - 7x + 9$

23.1. $k = -2$ **23.2.** PF **24.** $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$

25. zadanie przez analogię, pierwiastki: 3, –3 i –1

Rozdział 10. Wyrażenia wymierne, równania wymierne

1.B **2.** A **3.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ **4.** AG **5.** FP **6.** FP

7. I-D, II-B, III-C **8.** AF **9.** B1 **10.** dowód **11.** $x = -2$

12. FFP **13.** FP **14.** C **15.** dowód

16.1. $\frac{7x-2}{(x+1)(x-2)}$, dla $x \neq 2$ i $x \neq -1$ **16.2.** $\frac{3x-6}{4x+4}$, dla $x \neq 2$ i $x \neq -1$

16.3. $x = \frac{2}{7}$ **17.** $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$ **18.** D **19.** A

20. $x = -\frac{1}{3}$ **21.1.** $D = R \setminus \{-1, 3\}$ **21.2.** $x = \frac{1}{3}$ **21.3.** $W(2) < W(1) < W(0)$

22. **23.** FP **24.** FF **25.1.** **25.2.** **25.3.**

Rozdział 11. Ciągi liczbowe – pojęcia podstawowe

1. C **2.** C **3.** AB **4.** PFP **5.** AB **6.** A1 **7.** A

8.1. $n = 3$ **8.2.** $n \in \{5, 6, 7 \ldots\}$ 8.3. a_{12} **8.4.** jedenaście

9. CE **10.1.** $a_3 = \frac{1}{9}$ **10.2.** $a_5 = \frac{3}{25}$ **10.3.** $a_5 = \frac{49}{5000}$

11. AG **12.** nie ma wyrazu równego 8 **13.** AD

14. I-C, II-D, III-B **15.** I-E, II-B, III-C, IV-A **16.** A1

17.1. $a_{10} = \frac{20}{11}$ **17.2.** wyraz dziesiąty **17.3.** ciąg rosnący **18.** ABI **19.** C

20. Ciąg malejący **21.** I-B, II-A, III-D **22.** $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = 3$, ciąg rosnący

23.1. $a_n = -3n + 2$ **23.2.** $a_5 = -13$

23.3. czterdziestym **23.4.** nie ma wyrazów dodatnich

24. FP **25.1.** $a_n = -2n + 3$ **25.2.** tylko $a_1 > 0$

25.3. nieskończenie wiele **25.4.** dowód

format 205 x 292 mm
stron 140

Spis treści

Wstęp 4
Symbole używane w ksiące 5
I. Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne 6
II. Równania, nierówności i układy równań 24
III. Funkcje i ich własności 41
IV. Ciągi liczbowe i szeregi 66
V. Trygonometria 72
VI. Planimetria 81
VII. Stereometria 104
VIII. Geometria analityczna 118
IX. Rachunek różniczkowy 125
X. Rachunek prawdopodobieństwa 136

Wstęp

Podczas nauki matematyki uczniowie często korzystają z tzw. tablic maturalnych, czyli „Wybranych wzorów matematycznych" opracowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Wielu uczniów, a w szczególności maturzystów, podczas wprowadzania różnych zagadnień matematycznych pyta mnie: „czy to jest w tablicach maturalnych?".
Jeśli okazuje się, że jest, to widzę w ich oczach spokój, ale jeśli odpowiadam, że nie ma, to widzę pewne przerażenie, szczególnie kiedy podkreślam, że to bardzo ważne zagadnienie maturalne. Wtedy uczniowie znowu pytają: „czy mogę im podać te ważne rzeczy, których nie ma w tablicach maturalnych, a które są szczególnie ważne i często bywają na maturze?".

Książka „Porady i wskazówki, których nie ma w tablicach maturalnych" jest właśnie odpowiedzią na takie pytania, kierowaną zwłaszcza do maturzystów, aby mogli lepiej przygotować się do egzaminu. Powstała ona na podstawie mojego wieloletniego doświadczenia w nauczaniu matematyki, jak również wieloletniego doświadczenia w sprawdzaniu prac maturalnych (jako egzaminatora i weryfikatora). Książka zawiera bardzo przydatne porady i wskazówki – i co ważne – wraz z przykładami ich zastosowania. Każdy maturzysta powinien je znać i umieć zastosować, jednak wiemy (myślę, że zgodzą się tu ze mną również inni nauczyciele), że spora część uczniów ich nie pamięta, a nawet niektórych nie zna. Wskazówki podzielone są tematycznie, aby łatwiej było znaleźć potrzebą poradę i przykład.
W książce uwzględniono wymagania na maturę 2023!

A zatem zachęcam do poczytania „Porad i wskazówek...", życzę przyjemnej i owocnejpracy, a przede wszystkim powodzenia na maturze!

dr Tomasz Grębski

VI. Planimetria

WSKAZÓWKA 82. Liczba przekątnych w wielokącie

Wzór na liczbę przekątnych p w wielokącie wypukłym o n wierzchołkach (n bokach):

$$p = \frac{n(n-3)}{2}$$

Przykład 1.
Oblicz liczbę przekątnych w trzynastokącie wypukłym.
Rozwiązanie:
Wykorzystamy wzór dla $n = 13$

$$p = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{13(13-3)}{2} = 65.$$

Przykład 2.
Czy istnieje wielokąt wypukły, który ma 50 przekątnych?
Rozwiązanie:
Wykorzystamy wzór $p = \frac{n(n-3)}{2}$ dla $p = 50$

$$50 = \frac{n(n-3)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$100 = n(n-3)$$

$$n^2 - 3n - 100 = 0$$

$\Delta = 409$, czyli $\sqrt{\Delta}$ jest liczbą niewymierną, więc powyższe równanie nie ma naturalnych rozwiązań. Zatem wielokąt o 50 przekątnych nie istnieje.

WSKAZÓWKA 83. Suma kątów wewnętrznych wielokąta

Wzór na sumę kątów wewnętrznych S wielokąta wypukłego o n wierzchołkach (n bokach):

$$S = (n-2) \cdot 180°$$

Przykład 1.
Oblicz sumę kątów wewnętrznych osiemnastokąta wypukłego.
Rozwiązanie:
$n = 18$ zatem
$S = (18-2) \cdot 180° = 2880°$.

Przykład 2.
Suma kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wypukłego wynosi 2340°. Ile boków ma ten wielokąt?
Rozwiązanie:

$$2340 = (n-2) \cdot 180° \quad / : 180°$$

$13 = n - 2$, czyli $n = 15$.

WSKAZÓWKA 84. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego

Wzór na miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n wierzchołkach (n bokach):

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Przykład

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, który ma 15 wierzchołków.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \frac{(15-2)\cdot 180^\circ}{15} = \frac{2340^\circ}{15} = 156^\circ$$

WSKAZÓWKA 85. Suma kątów zewnętrznych wielokąta

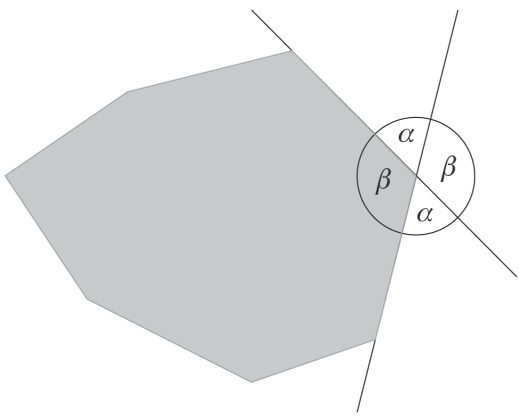
Suma kątów zewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego wynosi zawsze 720°.

Przykład

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że mamy n wierzchołków, czyli suma wszystkich kątów pełnych wynosi $n \cdot 360^\circ$.
Oznaczmy przez X sumę kątów zewnętrznych wielokąta.
(kąt zewnętrzny to kąt przyległy do kąta wewnętrznego – na rys. to kąt α)



$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot S$, gdzie $S = (n-2) \cdot 180^\circ$

Podstawiamy za S

$n \cdot 360^\circ = X + 2 \cdot (n-2) \cdot 180^\circ$

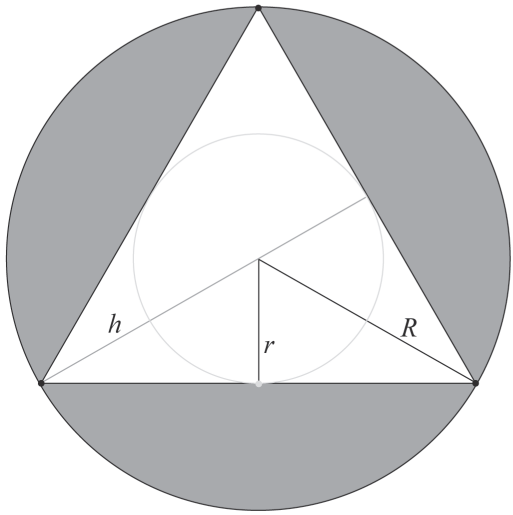
$n \cdot 360^\circ = X + n \cdot 360^\circ - 720^\circ$

Zatem

$X = 720^\circ$.

WSKAZÓWKA 86. Trójkąt równoboczny i okrąg

Trójkąt równoboczny oraz okrąg wpisany w niego i opisany na nim.



$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Przykład 1.

Oblicz pole trójkąta równobocznego jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = 6\sqrt{3}$$

Wiemy, że

$$R = \frac{2}{3}h \text{ oraz } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ zatem}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

Stąd

$$a = 18$$

Zatem

$$P_{\Delta} = \frac{18^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$

Maria Mędrzycka

Sto dowodów MATEMATYCZNYCH w dwóch krokach z rozwiązaniami

Matura od 2023 r.

format 165 x 235 mm
stron 64

Spis treści

Wstęp 4
Liczby pierwsze 5
Reszty z dzielenia 10
Cechy podzielności 14
Podzielność–rozkład na iloczyn. 16
Parzystość 23
Nierówności 25
Prawdopodobieństwo 37
Trójkąty. 41
Trójkąty–pola 45
Trójkąty i okręgi. 48
Czworokąty i okręgi 53

Wstęp

Wielu uczniów i nauczycieli nie lubi zadań dowodowych i uważa je za trudne. Jednak wystarczy zauważyć, że **twierdzenie** jest po prostu stwierdzeniem faktu, a **dowód** jest wyjaśnieniem, dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe. Rozwiązując dowolne zadanie rachunkowe, wielokrotnie dowodzimy prawdziwość drobnych faktów, nawet tego nie zauważając. Dowód to każde uzasadnienie-„dlaczego”coś jest prawdziwe. W tym zbiorze zajmiemy się takimi twierdzeniami, których dowody wymagają tylko dwóch kroków. Zazwyczaj jeden z tych kroków wykorzystuje podane założenia, drugi – posiadaną wiedzę matematyczną.

Wiele twierdzeń ma taką formę:

Twierdzenie 1. Jeśli zdanie A jest prawdziwe, to zdanie B też jest prawdziwe.

Dowód takiego twierdzenia (implikacji) to wyjaśnienie, dlaczego zdanie B musi być prawdziwe, jeśli zdanie A jest prawdziwe. Dowód wprost zaczyna się od założenia, że zdanie A jest prawdziwe (w końcu piszemy „jeśli A jest prawdziwe” i to jest nasze założenie). Zresztą, jeśli zdanie A jest fałszywe, to nie mamy się czym martwić. A więc, przypuszczamy, że zdanie A jest prawdziwe i zapisujemy to w dowodzie jako pierwszy krok. To jest informacja, której możemy użyć w dalszych działaniach.Dalej postępujemy logicznie, krok po kroku, aż dojdziemy do stwierdzenia, że zdanie B jest prawdziwe.

Ważne jest, aby takie działania zapisywać w języku polskim. Są wprawdzie znaki matematyczne, którymi można zapisać część rozumowania, ale dla czytelności takiego zapisu nie należy moim zdaniem zastąpić całkowicie języka polskiego w zapisie.

Koniec rozumowania zapisujemy słowami „koniecdowodu” lub innym oznaczeniem.

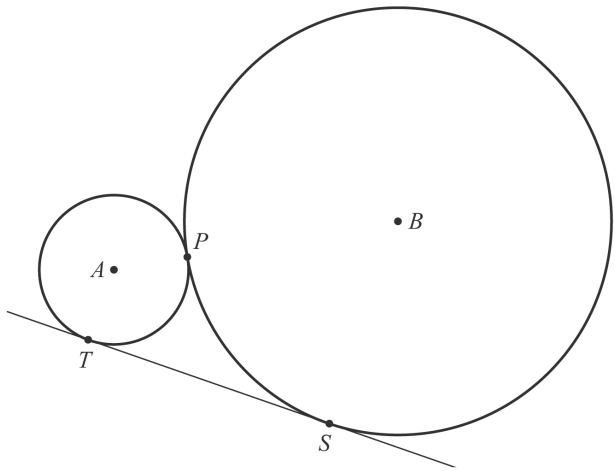
Autorka

Trójkąty i okręgi

Zadanie 82.

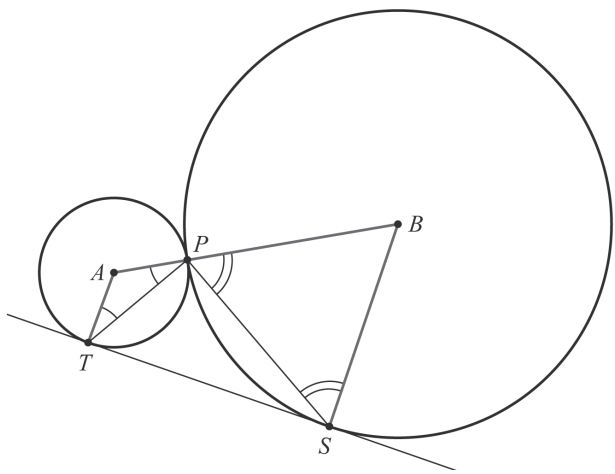
Dwa okręgi o promieniach a i b oraz środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Wykaż, że kąt TPS jest prosty.

Założenie: Okręgi o promieniach a i b i środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S.
Teza: Kąt TPS jest prosty.

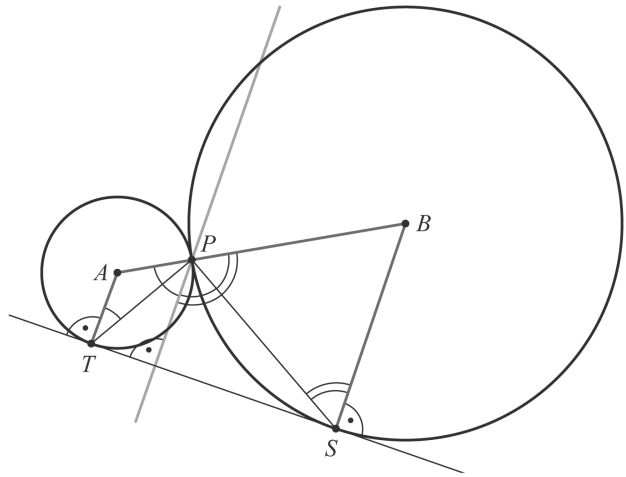


Rozwiązania:

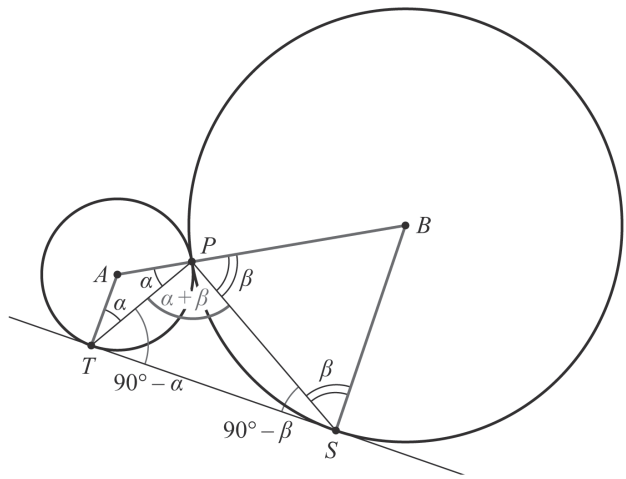
Sposób 1:
Krok 1: AT i BS są prostopadłe do prostej TS (promienie okręgów stycznych do prostej).



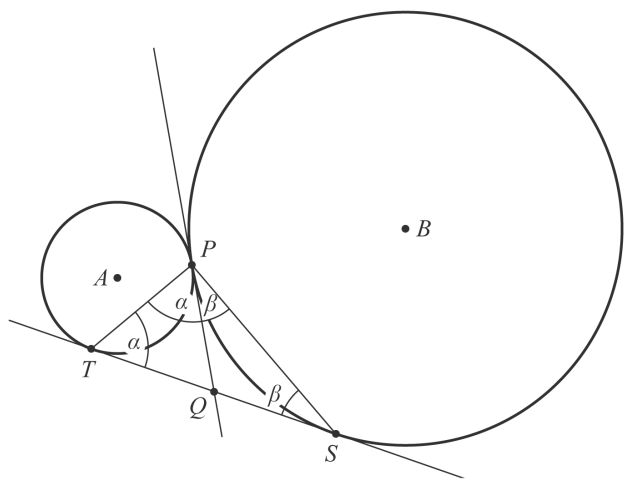
Krok 2: Narysujmy prostą prostopadłą do TS przechodzącą przez P i zauważmy kąty naprzemianległe:
$\sphericalangle APB = 180° =$
$= 2\sphericalangle APT + 2\sphericalangle BPS$,
zatem
$\sphericalangle APT + \sphericalangle PBS = 90° =$
$= \sphericalangle TPS$.
Koniec dowodu



Sposób 2:
Krok 1: Oznaczamy $\sphericalangle ATP = \alpha$ i $\sphericalangle BSP = \beta$, zatem $\sphericalangle PTS = 90° - \alpha$, $\sphericalangle PST = 90° - \beta$.
Krok 2: – sumy kątów w trójkącie PTS wynika, że
$\sphericalangle TPS = \alpha + \beta =$
$= \frac{1}{2}\sphericalangle APB = 90°$.
Koniec dowodu.



Sposób 3:
Krok 1: rysujemy styczna to danych okręgów w punkcie P. Ta styczna przecina odcinek TS w punkcie Q. Powstają (z twierdzenia o stycznej) dwa trójkąty równoramienne:
Krok 2: – sumy kątów w trójkącie TPS mamy: $2\alpha + 2\beta = 180°$, a stąd $\alpha + \beta = 90° = \sphericalangle TPS$.
Koniec dowodu.



Zadanie 83.

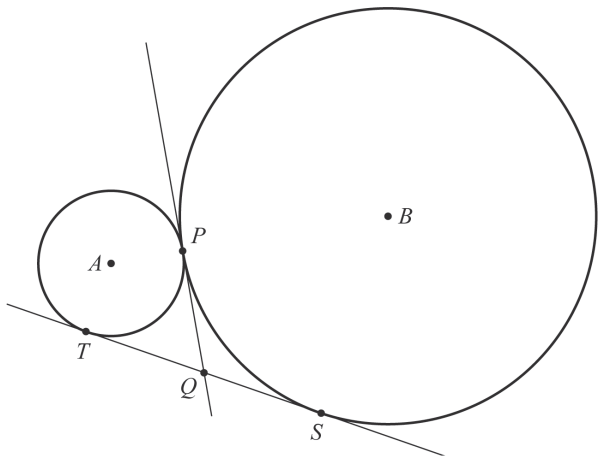
Styczna do tych okręgów w punkcie P przecięła prostą ST w punkcie Q. Wykaż, że $PQ = \frac{1}{2}TS$.

Założenie: okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S.

Teza: $PQ = \frac{1}{2}TS$

Dowód:

Krok 1: – twierdzenia o stycznej dla okręgu o środku A mamy $TQ = PQ$, dla okręgu o środku B mamy $PQ = SQ$.



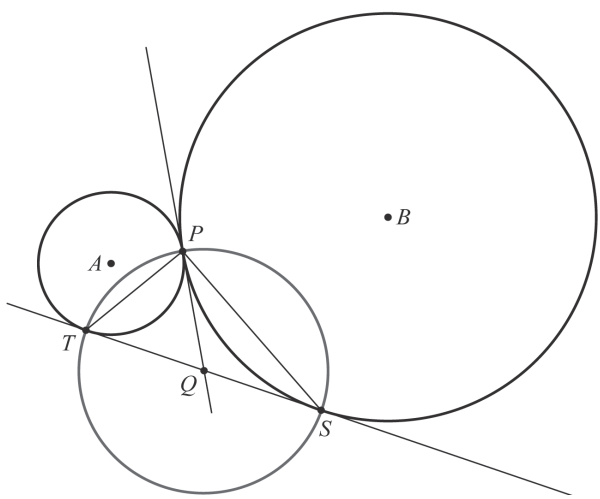
Krok 2: Niech $PQ = a$, zatem $TQ = a = SQ$, stąd $AS = 2a$, a zatem $PQ = \frac{1}{2}TS$.

Koniec dowodu.

Zadanie 84.

Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Styczna do tych okręgów przechodząca przez P przecina odcinek TS w punkcie Q. Wykaż, że Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie QST.

Założenie: Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta zewnętrzna jest styczna do tych okręgów w punktach T i S. Styczna do tych okręgów przechodząca przez P przecina odcinek TS w punkcie Q.



format 165 x 235 mm
stron 192

Spis treści

Lekcja 1 5
Lekcja 2 11
Lekcja 3 14
Lekcja 4 20
Lekcja 5 25
Drzewo ułamków 30
Lekcja 6 36
Lekcja 7 42
Lekcja 8 48
Lekcja 9 54
Lekcja 10 63
Twierdzenie Pick'a 68
Lekcja 11 77
Lekcja 12 84
Lekcja 13 91
Lekcja 14 99
Lekcja 15 104
64 = 65? 112
Lekcja 16 119
Lekcja 17 124
Lekcja 18 132
Lekcja 19 141
Lekcja 20 153
Wektory na płaszczyźnie 162

Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego jak matematyka.

Hugo Steinhaus

Biorąc do ręki ten wybór zadań, można zadać sobie pytanie: „Skąd ten tytuł? Dlaczego zadania na 6?". Może dlatego, że 6 jest liczbą doskonałą, taką, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników, za wyjątkiem ostatniego (samej liczby). Następnymi liczbami doskonałymi są: 28, 496, 8128, 33550336, … . Obok liczb doskonałych jest jeszcze wiele innych liczb o ciekawych własnościach: liczby Fibonacciego, Catalana itd. Ta paralela (również podczas rozwiązywania zadań) może być podstawą do zaproponowania uczniom projektu jako metody nauczania. Taką możliwość eksponują wplecione w zbiór cztery artykuły.

Nauczyciele powinni dostarczać swoim najlepszym uczniom interesujących i trudnych zadań, które pomogą im wciąż dostrzegać magię w matematyce. Zadania zamieszczone w tym zbiorze są rozwiązane, ale są to tylko przykłady prawidłowych rozwiązań. Matematyka, jak żaden inny przedmiot, ma wyjątkową cechę: umożliwia indywidualną sprawczość – większość zadań można bowiem rozwiązać na wiele sposobów. Dodatkowo, dzięki tej własności, jeśli tylko matematyce na to pozwolimy, uczyni z nas matematycznych odkrywców; nas – nauczyciela i ucznia.

Zachęcam Was, drodzy Czytelnicy, do podjęcia samodzielnej próby znalezienia własnych metod rozwiązania. Nie zniechęcajcie się, jeśli za pierwszym razem rozwiążecie samodzielnie niewiele zadań z tej książki. Zadania mają być trudne, a niektóre problemy będą wymagać od Was wielokrotnego, uważnego czytania i wielu prób ich rozwiązań, nawet w ciągu kilku miesięcy. Zalecam czytanie rozwiązań, nawet jeśli zadanie zostanie rozwiązane poprawnie. Czytanie tekstu rozwiązania też jest nauką. Śledząc metodę rozwikłania matematycznego problemu, możecie znaleźć inną strategię niż ta, której użyliście do rozwiązania danego zadania i która będzie przydatna w innym poleceniu. Zdarzy się też tak, że uzyskacie bardziej wysmakowane i błyskotliwe rozwiązania, niż te przedstawione przez autora.

W niektórych rozwiązaniach pojawiają się obliczenia wykonane z zastosowaniem CAS GeoGebry. Jest to zabieg celowy, pokazujący, że nie trzeba tracić czasu na żmudne rachunki. Wiele wykresów (jeśli nie były głównym celem zadania) wykonałem też w GeoGebrze: są precyzyjne i estetyczne. W tym miejscu wspomnę jeszcze o możliwości zmieniania zadań choćby poprzez zmianę danych lub pewnych warunków. Zapewniam, że GeoGebra jest niezastąpiona w szybkim sprawdzaniu możliwości rozwiązania.

Chciałbym, aby – dzięki tej książce – nauczyciele umieli wykorzystać drzemiący w nich dydaktyczny entzjazm mentora, a ich uczniowie – by poczuli sprawczą moc swego intelektu. Pozwólcie zatem, że zabiorę Was w świat matematycznej magii…

Autor

1. Wykaż, że w dowolnym trójkącie długość każdego boku jest większa niż różnica długości dwóch pozostałych boków.

Rozwiązanie

Założenie

$$a \geq b \geq c.$$

Teza

$$a > b - c$$
$$b > a - c$$
$$c > a - b$$

Dowód

1) Pierwsza nierówność tezy jest natychmiastowa; jeśli $a > b$ i $a > c$, to a jest większe od ich różnicy: $a > b - c$.
2) Aby wykazać pozostałe nierówności tezy, wykorzystamy fakt, że w każdym trójkącie długość dowolnego boku jest mniejsza niż suma długości dwóch pozostałych. Mamy zatem:

$$b + c > a.$$

Odejmując c od obu stron tej nierówności, otrzymujemy:

$$b + c - c > a - c \rightarrow \boldsymbol{b > a - c}.$$

Podobnie, odejmując b, otrzymujemy:

$$b + c - b > a - b \rightarrow \boldsymbol{c > a - b}.$$

2. Wyznacz resztę z dzielenia $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ przez $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Rozwiązanie

Dzielnikiem jest wielomian stopnia trzeciego, zatem reszta może być co najwyżej trójmianem kwadratowym $ax^2 + bx + c$. Jeśli ilorazem jest $Q(x)$, to

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Rozkładając wielomian $x^3 - 2x^2 - x + 2$ na czynniki, otrzymujemy:

$$\left(x^3 - 2x^2\right) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1).$$

Podstawiając kolejno $x = 2, 1, -1$,otrzymujemy równania:

$$2^{100} - 4 \cdot 2^{98} + 5 \cdot 2 + 6 = 16 = 4a + 2b + c,$$
$$1^{100} - 4 \cdot 1^{98} + 5 \cdot 1 + 6 = 8 = a + b + c,$$
$$(-1)^{100} - 4 \cdot (-1)^{98} + 5 \cdot (-1) + 6 = -2 = a - b + c.$$

Rozwiązanie zadania otrzymamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 16 \\ a + b + c = 8 \\ a - b + c = -2 \end{cases}$$

$4a + 2b + c = 16$ $\rightarrow 4a + 2b + c = 16$
$a + b + c = 8$ $\rightarrow a + b + c = 8$
$a - b + c = -2$ $\rightarrow a - b + c = -2$
{\$1, \$2, \$3} Rozwiąż $\{\{a = 1, b = 5, c = 2\}\}$

Odpowiedź

Resztą z dzielenia
$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ przez $x^3 - 2x^2 - x + 2$ jest $x^2 + 5x + 2$.

3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ 8x + ay = 2a \end{cases}$$

w zależności od parametru a.

Rozwiązanie

Obliczmy wyznaczniki W, W_x, W_y.

$$W = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{vmatrix} = a^2 - 16,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & a \end{vmatrix} = a^2 - 4a,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & a \\ 8 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 8a.$$

Rozpatrzmy teraz poszczególne przypadki.

1° Jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow W \neq 0$, czyli $a^2 - 16 \neq 0$.

Po przekształceniu, otrzymujemy:

$$(a+4)(a-4) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4 \text{ i } a \neq 4, \text{ czyli } a \in R \setminus \{-4, 4\}.$$

Wyznaczmy to rozwiązanie.

$$x = \frac{Wx}{W} = \frac{a^2 - 4a}{a^2 - 16} = \frac{a(a-4)}{(a+4)(a-4)} = \frac{a}{a+4},$$

$$y = \frac{Wy}{W} = \frac{2a^2 - 8a}{a^2 - 16} = \frac{2a(a-4)}{(a+4)(a-4)} = \frac{2a}{a+4}.$$

2° Nieskończenie wiele rozwiązań $\Leftrightarrow W = 0$ i $W_x = 0$, i $W_y = 0$

$$a^2 - 16 = 0 \text{ i } a^2 - 4a = 0, \text{ i } 2a^2 - 8a = 0$$

$$a \in \{-4, 4\} \text{ i } a \in \{0, 4\}, \text{ i } a \in \{0, 4\}$$

Dla $a = 4$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3° Brak rozwiązań $\Leftrightarrow W = 0$ i $\left(W_x \neq 0 \text{ lub } W_y \neq 0\right)$

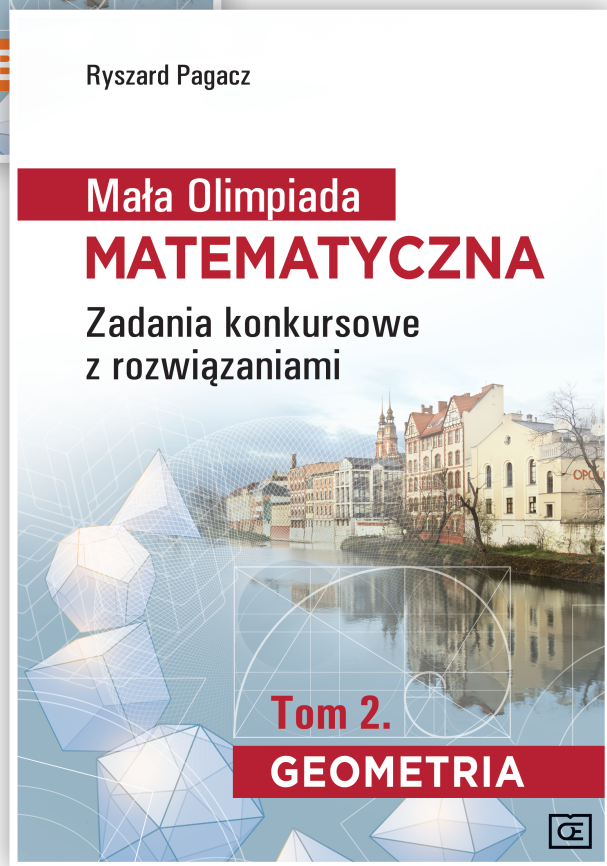
$W = 0$ dla $a = -4$; dla tego a zerem nie jest W_x i zerem nie jest W_y.

Odpowiedź

Układ równań:

- ma jedno rozwiązanie $x = \dfrac{a}{a+4}$ i $y = \dfrac{2a}{a+4}$ dla $a \in R \setminus \{-4, 4\}$;
- ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 4$;
- nie ma rozwiązań dla $a = -4$.

format 165 x 235 mm
stron 356



format 165 x 235 mm
stron 312

WSTĘP

W roku szkolnym 2021/2022 na Opolszczyźnie odbyły się LIV zawody Małej Olimpiady Matematycznej. Jest to jeden z najdłużej istniejących regionalnych konkursów matematycznych dla młodzieży szkół ponadpodstawowych w Polsce. Pierwsze zawody odbyły się w roku szkolnym 1967/1968. Zawody te od samego początku mają formułę zawodów drużynowych oraz indywidualnych. Do roku szkolnego 1977/1978 w zawodach uczestniczyli uczniowie tylko drugich klas szkół ponadpodstawowych. W latach 1978/1979 i 1979/1980 w drużynie szkolnej był również jeden uczeń klasy pierwszej. Od roku szkolnego 1980/1981 drużyna szkolna składa się z czterech uczniów dowolnej klasy.

Organizatorem Małej Olimpiady Matematycznej jest Kuratorium Oświaty w Opolu. Zadania od I do XXXV (2001/2002) Małej Olimpiady Matematycznej opracowywał zmarły w tym roku Pan Stanisław Zieleń. To wielce zasłużona postać dla opolskiej oświaty –nauczyciel, metodyk i doradca, autor podręczników do nauczania matematyki w szkołach średnich oraz różnorodnych zbiorów zadań. Od XXXVI Małej Olimpiady Matematycznej za zadania jest odpowiedzialna Komisja Konkursowa powoływana przez Kuratorium Oświaty w Opolu.

Zamieszczone zadania, oprócz walorów historycznych, mogą być świetną pomocą w przygotowaniu się do udziału w różnorodnych konkursach matematycznych. Zadania te również mogą być pomocne dla maturzystów przygotowujących się do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym. Do wszystkich zadań dołączone są rozwiązania.

Dziękuję wszystkim, którzy mnie zachęcali do opracowania tego bogatego materiału. Szczególnie dziękuję Panu Dyrektorowi Mariuszowi Mączyńskiemu z Oficyny Pazdro oraz redaktorowi tego wydawnictwa - Panu Doktorowi Tomaszowi Szwedowi. Dziękuję również mojej Żonie, że cierpliwie i ze zrozumieniem znosi moje zaangażowanie w zadania matematyczne.

Ryszard Pagacz

Spis treści tomu 1.

Wstęp 4
1. Liczby 5
2. Równania i nierówności 53
3. Dowody nierówności 133
4. Funkcje i wielomiany 159
5. Ciągi 211
6. Trygonometria 243
7. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. 293
8. Granica i ciągłość oraz pochodna . . 323
9. Zadania różne 339

Spis treści tomu 2.

Wstęp 4
1. Planimetria. 5
2. Stereometria 235
3. Geometria analityczna i wektory 281

4. Funkcje i wielomiany

M Zadanie 4.1. [1980/1981, zawody szkolne]

Funkcja f ma następującą własność: dla każdej liczby rzeczywistej x, $f\left(x+\frac{1}{3}\right)=f(x)$ oraz $f(0)=1$, $f(0{,}5)=2$. Wyznaczyć wartości tej funkcji dla $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{6},1,1\frac{2}{3},2$.

Rozwiązanie

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(0+\frac{1}{3}\right)=f(0)=1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

$$f(1)=f\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=1$$

$$f\left(1\frac{1}{3}\right)=f\left(1+\frac{1}{3}\right)=f(1)=1$$

$$f\left(1\frac{2}{3}\right)=f\left(1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=f\left(1\frac{1}{3}\right)=1$$

$$f(2)=f\left(1\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=f\left(1\frac{2}{3}\right)=1.$$

M Zadanie 4.2. [1980/1981, zawody szkolne]

Naszkicować wykres funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania $(m+1)^2x^2-4x+1=0$.

Rozwiązanie

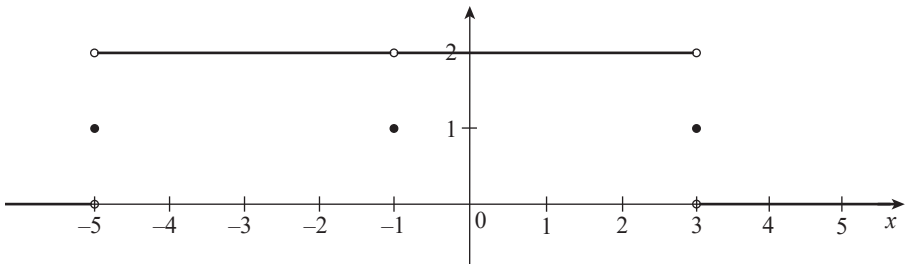
Dla $m=-1$ jedno rozwiązanie.

$$\Delta=16-4(m+1)^2=4\left(4-(m+1)^2\right)=4(3-m)(5+m).$$

Dla $m \in \{-5, 3\}$ jedno rozwiązanie.

Dla $m \in (-5, -1) \cup (-1, 3)$ dwa rozwiązania.

Dla $m \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ nie ma rozwiązania, czyli zero rozwiązań.



Zadanie 4.3. [1980/1981, klasa 2, zawody woj.]

Wykazać, że zbór wartości wielomianu

$w(x, y) = (xy - 2)^2 + 2(xy - 1) + x^2 - 1$ składa się ze wszystkich liczb dodatnich.

Rozwiązanie

$$w(x,y) = (xy)^2 - 4xy + 4 + 2xy - 2 + x^2 - 1 =$$
$$= (xy)^2 - 2xy + 1 + x^2 = (xy - 1)^2 + x^2.$$

Zatem $w(x, y) \geq 0$.

Czy może być $w(x, y) = 0$?

Tak byłoby, gdyby jednocześnie $xy = 1$ i $x = 0$, a to jest niemożliwe.

Zatem $w(x, y) > 0$.

Musimy jeszcze wykazać, że każda liczba dodatnia jest wartością wielomianu *w*.

Dla każdej liczby dodatniej *t* mamy: $w\left(\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \left(\sqrt{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{t}\right)^2 = t.$

Zatem udowodniliśmy, że zbiorem wartości wielomianu $w(x, y)$ jest przedział $(0, +\infty)$.

M Zadanie 4.4. [1981/1982, klasa 2, zawody szkolne]

Wiadomo, że wielomian $x^3 - 6x + a$ w ma pierwiastek podwójny.
Znaleźć pierwiastek i liczbę *a*.

Rozwiązanie

Niech b będzie pierwiastkiem dwukrotnym. Wtedy

$$x^3 - 6x + a = (x-b)^2(x-c)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$x^3 - 6x + a = x^3 - (2b+c)x^2 + (2bc + b^2)x - cb^2$$

Wtedy

$$\begin{cases} 2b + c = 0 \\ b^2 + 2bc = -6 \\ -cb^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ b^2 = 2 \\ a = 2b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \\ c = -2\sqrt{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -4\sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \\ c = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $\sqrt{2}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6x + 4\sqrt{2}$, natomiast $-\sqrt{2}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6x - 4\sqrt{2}$.

Odp. $a = 4\sqrt{2}$ i pierwiastkiem podwójnym jest $\sqrt{2}$.

$a = -4\sqrt{2}$ i pierwiastkiem podwójnym jest $-\sqrt{2}$.

II sposób

Niech $P(x) = x^3 - 6x + a$.

Wtedy $P'(x) = 3x^2 - 6$. Pierwiastkiem dwukrotnymi mogą być liczby: $\sqrt{2}$ lub $-\sqrt{2}$.

Wtedy, gdy $P(\sqrt{2}) = 0$, to $(\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + a = 0$, czyli $a = 4\sqrt{2}$.

Można zauważyć, że $\sqrt{2}$ nie jest pierwiastkiem trzykrotnym.

Liczba $-\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem dwukrotnym dla $a = -4\sqrt{2}$.

M Zadanie 4.5. [1981/1982, klasa 2, zawody szkolne]

Naszkicować wykresy funkcji:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}|x^2 - x| \text{ oraz } y = \frac{1}{2}(x^2 - x) - \frac{1}{2}|x^2 - x|.$$

Rozwiązanie

$$y_1 = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & \text{dla } x^2 - x \geq 0 \\ 0, & \text{dla } x^2 - x < 0 \end{cases}$$

2. Stereometria

Zadanie 2.1. [1980/1981, klasa 3, zawody woj.]

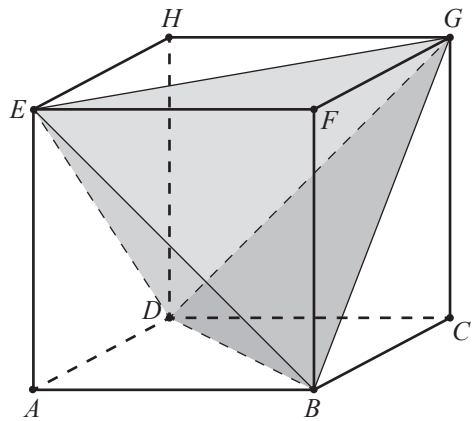
Rozstrzygnąć, czy czworościan foremny o krawędzi, której długość wynosi 2 może zwierać się w prostopadłościanie o wymiarach: $2, 2, \sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Tak.

W sześcian $ABCDEFGH$ o boku długości $\sqrt{2}$ mieści się czworościan foremny o boku 2.

Sześcian o boku długości $\sqrt{2}$ mieści się w prostopadłościanie o bokach długości 2, 2, $\sqrt{2}$.



M Zadanie 2.2. [1983/1984, klasa 3, zawody woj.]

Przez środek ciężkości ściany czworościanu foremnego poprowadzono płaszczyznę równoległą do dwóch skośnych krawędzi. Obliczyć pole przekroju tego czworościanu daną płaszczyzną, jeżeli długość krawędzi czworościanu jest równa 1.

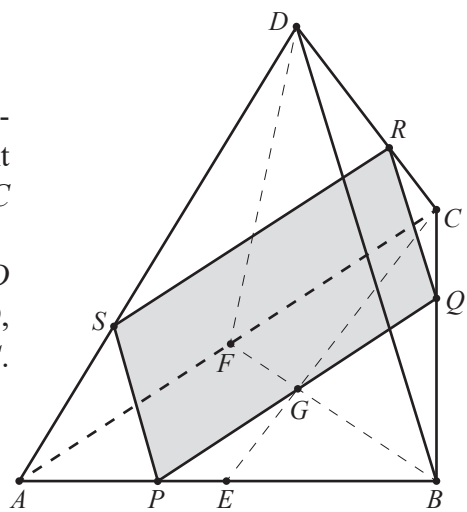
Rozwiązanie

Niech punkt G będzie punkt przecięcia środkowych BF i CE w trójkącie ABC. Punkt ten jest środkiem ciężkości ściany ABC czworościanu $ABCD$ (zobacz rysunek).

Płaszczyzna równoległa do krawędzi BD i AC przecina krawędzie AB, BC, CD, AD w punktach odpowiednio P, Q, R, S. Wtedy

$PQ \parallel AC$ i $RS \parallel AC \Rightarrow PQ \parallel RS$

$PS \parallel BD$ i $QR \parallel BD \Rightarrow PS \parallel QR$



Zatem czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.

$$|PQ| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}$$

$$|PS| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}$$

$PS \parallel BD$ i $PQ \parallel AC$ i $BD \perp AC \Rightarrow PS \perp PQ$

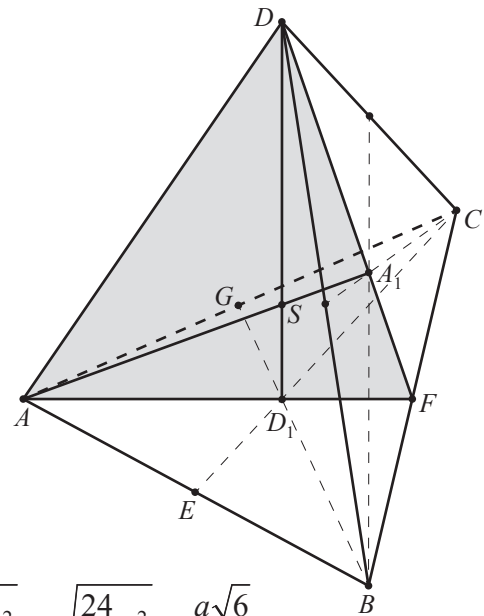
Zatem $PQRS$ jest prostokątem.

Pole przekroju równa się $\frac{2}{9}$.

M Zadanie 2.3. [1985/1986, klasa 3, zawody szkolne]

W jakim stosunku przecinają się wysokości w czworościanie foremnym?

Rozwiązanie



Niech AA_1, DD_1 będą wysokościami czworościanu $ABCD$ o krawędzi długości a.

Wtedy

$$|AF| = |BG| = |CE| = |DF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$|FD_1| = \frac{1}{3}|AF| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = |FA_1|$$

$$|AD_1| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{a\sqrt{3}}{3} = |DA_1|$$

$$|DD_1| = \sqrt{|DF|^2 - |D_1F|^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2} = \sqrt{\frac{24}{36}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trójkąty DD_1F i DSA_1 są podobne. Zatem

$$\frac{|DS|}{|SA_1|} = \frac{|DF|}{|FD_1|}$$

Wykorzystując, że $|SA_1| = |SD_1|$ otrzymujemy

$$\frac{|DS|}{|SD_1|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 3 = \frac{3}{1}$$

Punkt przecięcia wysokości dzieli je w stosunku 3 : 1.

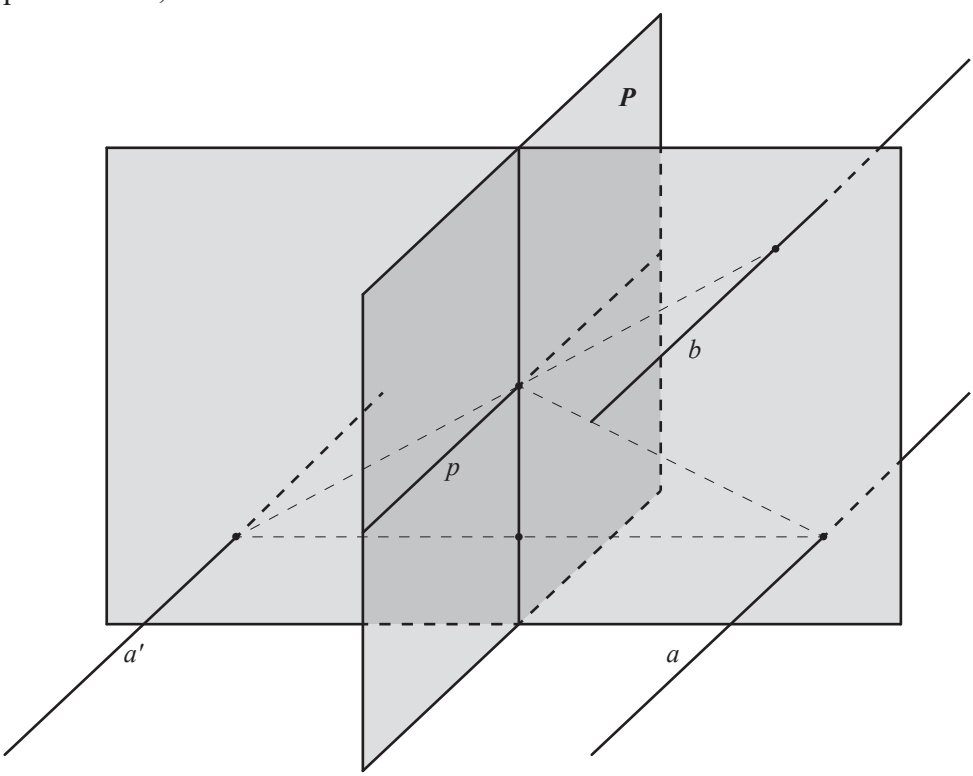
Zadanie 2.4. [1986/1987, klasa 4, zawody szkolne]

Proste równoległe a i b są zawarte w jednej półprzestrzeni otwartej wyznaczonej przez płaszczyznę $\boldsymbol{P}$. Wyznaczyć na płaszczyźnie $\boldsymbol{P}$ taką prostą p, aby płaszczyzny: pł.(a, p) i pł.(b, p) tworzyły z płaszczyzną $\boldsymbol{P}$ kąty dwuścienne przystające.

Rozwiązanie

Niech a' będzie prostą symetryczną do prostej a względem płaszczyzny $\boldsymbol{P}$.

Prosta p jest krawędzią przecięcia płaszczyzny $\boldsymbol{P}$ i płaszczyzny zawierającej proste a' i b,



format 165 x 235 mm
stron 336

Spis treści

ROZDZIAŁ 1 7
1.1. Liczby pierwsze 7
1.2. Niewymierność liczb 12
1.3. Pierwiastki trójmianu kwadratowego 17
1.4. Podstawowe własności potęg i logarytmów 24
1.5. Dzielenie wielomianów 36
1.6. Ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny 43
1.7. Twierdzenia o kątach w okręgu 59
1.8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym 70
1.9. Twierdzenie o dwusiecznej 84
1.10. Wzory na pole trójkąta 92
1.11. Twierdzenie sinusów 99
1.12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 105

ROZDZIAŁ 2. 120
2. Rozwiązania do rozdziału 1 120
2.1. Liczby pierwsze 120
2.2. Niewymierność liczb 122
2.3. Pierwiastki trójmianu kwadratowego 124
2.4. Podstawowe własności potęg i logarytmów 126
2.5. Dzielenie wielomianów 130
2.6. Ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny 132
2.7. Twierdzenie o kątach w okręgu 141
2.8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym 144
2.9. Twierdzenie o dwusiecznej 151
2.10. Wzory na pole trójkąta 159
2.11. Twierdzenie sinusów 166
2.12. Twierdzenie cosinusów (Carnota) i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 173

ROZDZIAŁ 3 181
3.1. Kombinatoryka 181
3.2. Dwumian Newtona i inne wzory skróconego mnożenia 186
3.3. Wzory Viete'a 195
3.4. Wzory trygonometryczne 204
3.5. Punkty szczególne trójkąta 216
3.6. Czworokąt wpisany w okrąg 236
3.7. Czworokąt opisany na okręgu 249
3.8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny 253
3.9. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych 259

ROZDZIAŁ 4 263
4. Rozwiązania do rozdziału 3 263
4.1. Kombinatoryka 263
4.2. Dwumian Newtona i inne wzory skróconego mnożenia 269
4.3. Wzory Viete'a 274
4.4. Wzory trygonometryczne 277
4.5. Punkty szczególne trójkąta 281
4.6. Czworokąt wpisany w okrąg 292
4.7. Czworokąt opisany na okręgu 301
4.8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny 308
4.9. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych 310

ROZDZIAŁ 5. Uzupełnienie 314

Publikacja **„Matematyka. Twierdzenia i dowody. Zadania z rozwiązaniami do liceów i techników”** jest zgodna z podstawą programową MEN, która obowiązuje w tych szkołach od września 2019 roku (rozporządzenie MEN z dnia 30 stycznia 2018 roku w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, DzU 2018, poz. 467). Zamieściliśmy w niej dowody wszystkich twierdzeń matematycznych wymienionych w tym rozporządzeniu. Bardzo często dowody pokazujemy w kilku wariantach. Mamy nadzieję, że każdy uczeń odnajdzie sposób przeprowadzenia dowodu właściwy dla siebie i swoich umiejętności.

Zachęcamy do korzystania z tej książki zarówno uczniów, jak i nauczycieli, niekoniecznie związanych z nowym liceum i technikum. Polecamy ją wszystkim zainteresowanym matematyką. Dla nauczycieli matematyki czytanie i dogłębna analiza dowodów oraz rozwiazywanie załączonych zadań na dowodzenie będzie okazją do doskonalenia swojego warsztatu pracy oraz poszerzenia możliwości rozwiazywania trudnych zadań. Prezentowany materiał pozwoli uczniom lepiej zrozumieć matematykę i solidniej przygotować się do studiowania jej na wyższym etapie edukacyjnym.

Podsumowując, książka **„Twierdzenia i dowody...”** to:

- zestaw najważniejszych twierdzeń matematyki w liceum i technikum wraz z dowodami,
- możliwość prześledzenia różnych sposobów dowodzenia twierdzeń,
- inspiracja dla ucznia do samodzielnego dowodzenia twierdzeń,
- wsparcie metodyczne dla nauczyciela w trudnej sztuce nauczania dowodzenia,
- bogate źródło trudnych i oryginalnych zadań dla ucznia wraz z rozwiązaniami,
- znakomity materiał do kształtowania umiejętności rozumowania i myślenia matematycznego,
- wsparcie realizacji podstawy programowej z matematyki,
- skuteczne przygotowanie uczniów do egzaminu maturalnego, również od 2023 roku.

Życzymy naszym Czytelnikom dobrej i twórczej pracy.

Autorzy

1.9. TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Podstawa programowa

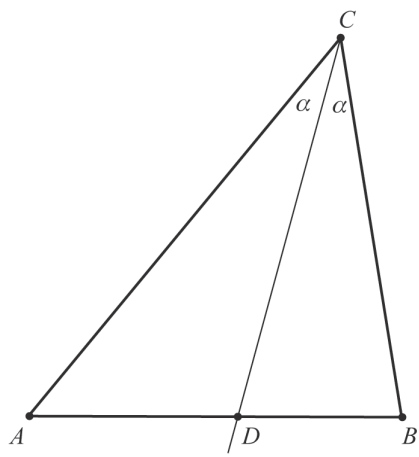
9. Twierdzenie o dwusiecznej:

Jeśli prosta CD jest dwusieczną kąta ACB w trójkącie ABC i punkt D leży na boku AB, to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Twierdzenie to możemy zapisać również w postaci:

Twierdzenie P9.1.

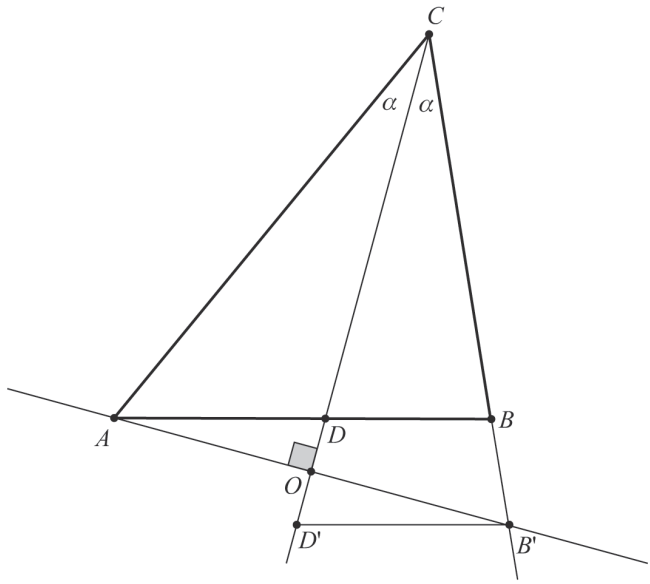
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalnie do boków przyległych.



Przy przyjętych oznaczeniach treść twierdzenia wyraża proporcja:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Dowód 1.



Zakładamy, że $|AC| \neq |BC|$. W przypadku, gdy $|AC| = |BC|$ trójkąt ABC jest równoramienny, wtedy $|AD| = |DB|$ i teza jest oczywista.

Z punktu A prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej CD. Prosta ta przecina dwusieczną w punkcie O, natomiast prostą BC w punkcie B'.

Ponieważ w trójkącie $AB'C$ dwusieczna jest prostopadła do podstawy AB', więc trójkąt $AB'C$ jest trójkątem równoramiennym, zatem

$$|AO| = |OB'| \text{ i } |AC| = |B'C|.$$

Poprowadźmy jeszcze przez punkt B' prostą równoległą do boku AB. Przecina ona prostą CD w punkcie D'. Trójkąty ADO i $B'D'O$ są przystające (kbk), więc $|D'B'| = |AD|$.

Z podobieństwa trójkątów DBC i $D'B'C$ wynika, że

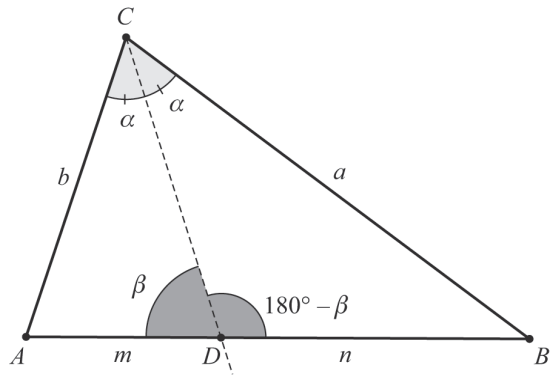
$$\frac{|D'B'|}{|DB|} = \frac{|B'C|}{|BC|},$$

czyli

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

co należało wykazać.

Dowód 2.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ADC i DBC wynika, że

$$\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oraz

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ + \beta)} = \frac{a}{\sin\beta}.$$

Dzieląc stronami równości

$$\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ i } \frac{n}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta},$$

otrzymujemy tezę:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

co kończy dowód.

Dowód 3.

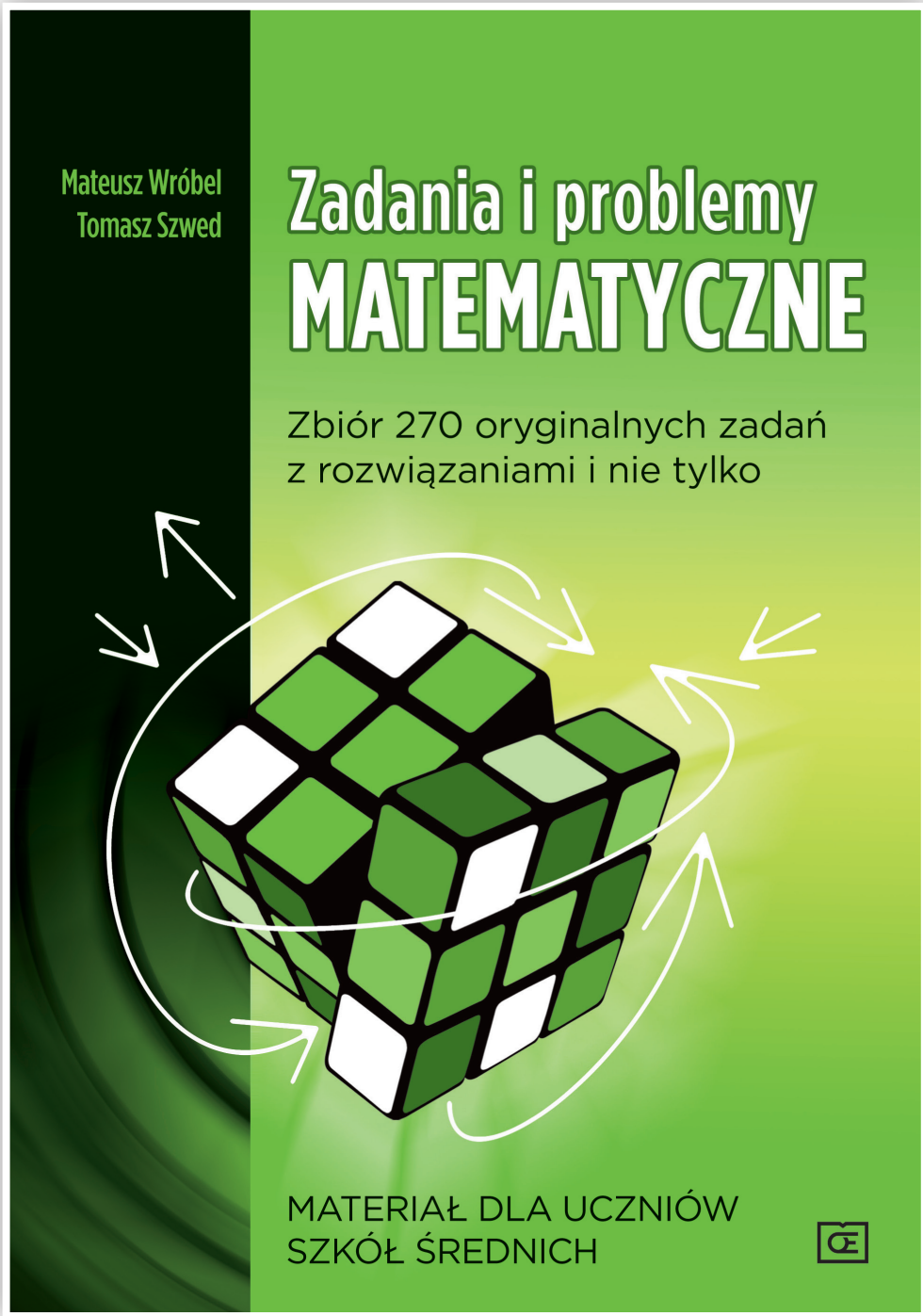
Oznaczenia takie jak w dowodzie 2.

Ponieważ stosunek pól trójkątów o równej wysokości równy jest stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{m}{n}.$$

Z drugiej strony, mamy:

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2}b|CD|\sin\alpha}{\frac{1}{2}a|CD|\sin\alpha} = \frac{b}{a},$$



format 165 x 235 mm
stron 208

Zacznij od zrobienia tego, co konieczne; potem zrób to, co możliwe.
Nagle odkryjesz, że dokonałeś niemożliwego.
św. Franciszek z Asyżu

„Zadania i problemy matematyczne…” adresujemy przede wszystkim do uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Znajdą oni w tym zbiorze blisko 270 oryginalnych zadań i problemów matematycznych. Każde zadanie – problem posiada pełne rozwiązanie i stanowi wartościowy materiał do samokształcenia oraz poznania różnorodnych metod i narzędzi matematycznych, służących efektywnemu rozwiązywaniu zadań.

Książka ta z powodzeniem wzbogaci warsztat pracy każdego nauczyciela matematyki. Będzie również cennym materiałem dydaktycznym dla nauczycieli przygotowujących uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zadania zawarte w tym zbiorze będą dobrym materiałem ćwiczeniowym na kółka matematyczne i inne zajęcia dodatkowe, mające na celu pogłębienie kompetencji matematycznych uczniów.

Zbiór składa się z trzech części:

- **zadania – „startery”** (z odpowiedziami),
- **zadania – problemy** (z pełnymi rozwiązaniami),
- **zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania.**

Aby pomóc uczniowi w zorganizowaniu pracy, zbiór podzielono na trzydzieści jednostek – każda z nich zawiera dwa startery i pięć problemów. Na rozwiązanie zadań zawartych w jednej jednostce trzeba przeznaczyć około godziny.

Naturalnymi towarzyszami procesu uczenia się są: praca, trud, zaangażowanie, zmęczenie, niemoc, zniecierpliwienie i popełnianie błędów. Droga do sukcesu w matematyce nie jest łatwa i wymaga ciągłego podtrzymywania motywacji. Dlatego też zdecydowaliśmy się na zamieszczenie trzydziestu inspirujących myśli, zachęcających do pokonywania wszelkiego rodzaju trudności.

Uczenie się matematyki nie jest procesem linearnym, dlatego zadania nie są poukładane według działów programowych. Niezwykle ważną umiejętnością maturzysty jest dobór narzędzi właściwych do postawionego problemu. Aby ułatwić orientację w zawartości merytorycznej zadań i przypisanie ich do konkretnych działów programowych, przygotowaliśmy poniższy wykaz:

Liczby. Dowody algebraiczne: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.6, 3.7, 5.2, 5.4, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.7, 9.1, 9.2, 10.4, 10.5, 10.6, 17.2, 17.5, 18.2a, 20.4, 22.4, 22.5, 22.6, 23.6, 27.1, 29.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania: 2, 13, 14, 26, 32, 40, 44, 45.

Funkcje. Funkcja kwadratowa: 2.6, 3.2, 3.4, 4.2, 5.1, 5.7, 6.1, 6.3, 6.5, 9.4, 14.6, 15.1,

16.3, 18.1, 18.2b, 18.3, 18.4, 19.2, 21.3, 21.6, 21.7, 25.5, 26.2, 28.1, 28.7, 29.1, 29.4, 30.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 12, 30.

Wielomiany i funkcja wymierna: 4.1, 5.3, 6.7, 10.1, 10.2, 10.7, 11.3, 12.7, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 15.2, 15.3, 16.1, 16.2, 17.7, 28.2.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 47, 49.

Planimetria. Dowody geometryczne: 1.7, 2.3, 2.4, 4.3, 4.4, 4.6, 6.6, 7.4, 9.3, 9.5, 9.6, 11.2, 11.5, 11.7, 12.1, 12.4, 12.5, 12.6, 13.6, 13.7, 14.3, 15.5, 16.7, 17.3, 17.4, 19.3, 19.5, 19.6, 20.5, 20.6, 20.7, 21.5, 22.3, 23.5, 23.7, 24.5, 25.4, 27.7, 28.3.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 1, 10, 17, 38, 42, 48.

Geometria analityczna: 1.3, 1.4, 4.7, 5.6, 7.5, 7.6, 11.4, 16.6, 19.7, 23.3, 23.4, 24.4, 25.2, 25.3, 28.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 15, 25, 31.

Ciągi liczbowe: 1.5, 2.7, 3.3, 3.5, 4.5, 9.7, 10.3, 11.6, 12.2, 16.4, 16.5, 19.1, 20.1, 25.6, 25.7, 26.3, 26.4, 26.5, 26.6, 26.7, 27.3, 27.4, 27.5, 29.5.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 11, 41.

Trygonometria: 5.5, 8.6, 11.1, 17.1, 17.6, 29.2, 30.1.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 24, 34, 39.

Stereometria: 7.7, 8.3, 8.4, 8.5, 13.5, 15.6, 18.5, 18.6, 18.7, 23.2, 24.1, 27.2, 28.4.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 16, 28, 43, 46.

Granice, pochodne, optymalizacja: 7.3, 15.7, 19.4, 20.2, 21.1, 21.2, 22.1, 22.2, 24.6, 24.7, 27.6, 29.6, 29.7, 30.3, 30.4, 30.5, 30.6, 30.7.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 18, 19, 21, 33.

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa: 1.6, 2.5, 6.4, 12.3, 15.4, 20.3, 21.4, 22.7, 23.1, 24.2, 25.1, 26.1, 28.6.
Zadania do samodzielnego rozwiązania: 20, 27, 29, 35, 36, 37, 50.

Wszystkim Czytelnikom życzymy wyraźnych postępów w kształtowaniu kompetencji matematycznych oraz wyników maturalnych na miarę marzeń, potrzeb edukacyjnych oraz włożonej pracy.

Autorzy

Spis treści

Problemy i startery 6

Odpowiedzi i rozwiązania 66

Problemy do samodzielnego rozwiązania 197

Zadania 197

Odpowiedzi 205

1.1. Oblicz:

a) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$

b) $\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}-\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}-1\right)^3-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

1.2. Pozbądź się niewymierności z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}$

Prawo przyciągania: szczęście sprzyja tym, którzy się starają.

Barbara Oakley

1.3. Okrąg o_2 ze środkiem leżącym na osi Ox, jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 o równaniu $(x-3)^2+(y+5)^2=25$ i jednocześnie jest styczny do prostej $x+2\sqrt{6}y-3=0$.
Wyznacz równanie okręgu o_2. Rozważ wszystkie przypadki.

1.4. Punkt S leży na osi Ox i jest środkiem okręgu stycznego jednocześnie do obu prostych: $4x-3y+21=0$ oraz $3x+4y-28=0$. Oblicz promień tego okręgu oraz wyznacz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki.

1.5. W trójwyrazowym ciągu geometrycznym (a,b,c) wszystkie wyrazy są dodatnie. Wyznacz wszystkie wartości ilorazu tego ciągu, dla których odcinki o długościach a, b, c tworzą trójkąt.

1.6. Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych parzystych, które zawierają co najmniej cztery dwójki.

1.7. Długości boków trójkąta o obwodzie 30 tworzą ciąg arytmetyczny. Największy kąt tego trójkąta wynosi 120°. Oblicz pole tego trójkąta.

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, w którym najdłuższy bok ma długość 22, a każdy z trzech pozostałych boków ma długość 10.

2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x(1 + y) - 2(x^2 + 2y^2) < 5$.

3. Rozwiąż równanie $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = 6tg\, x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

4. Rozwiąż równanie $\sin 2x - \cos x = \cos 2x + \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

5. Rozwiąż równanie $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

6. Rozwiąż równanie $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

7. Rozwiąż równanie $5\cos 2x + 4\sin x \cdot \cos^2 x + 4\sin x = -1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

8. Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - \cos^2 2x = 1$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

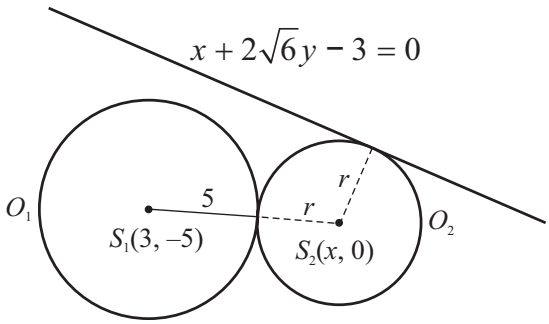
9. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} + \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\, x = 3\sin x$ w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

1.1. a) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ b) $6-2\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{3}-14$

1.2. a) $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}+1}{5}$

1.3. $\left(x-\dfrac{61}{12}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{144}$ lub $\left(x-\dfrac{11}{12}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{144}$

Rozwiązanie



Z równania okręgu o_1 mamy środek (3, –5) i promień długości 5. Środek okręgu o_2 ma współrzędne $(x, 0)$, bo leży na osi Ox. Odległość punktu $S_2=(x, 0)$ od prostej $x+2\sqrt{6}y-3=0$ jest równa r,

zatem $\dfrac{\left|1\cdot x+2\sqrt{6}\cdot 0+(-3)\right|}{\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}}=r \Leftrightarrow \dfrac{|x-3|}{5}=r.$

Z warunku na styczność zewnętrzną okręgów mamy:

$$|S_1S_2|=5+r \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(0+5)^2}=5+r \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+25}=5+r.$$

Podstawiamy $r=\dfrac{|x-3|}{5}$ do równania $\sqrt{(x-3)^2+25}=5+r.$

$$\sqrt{(x-3)^2+25}=5+\frac{|x-3|}{5} \qquad |\cdot 5$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25}=25+|x-3|$$

Rozwiązujemy równanie w przedziałach:

dla $x \geq 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 25 + x - 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 22 + x \qquad |\cdot(\ )^2$$

$$25\left[(x-3)^2+25\right] = (22+x)^2$$

z powyższego równania mamy $x_1 = \frac{61}{12}$ oraz $x_2 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$.

Obliczamy $r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{61}{12} - 3\right|}{5} = \frac{5}{12}$,

Mając środek $S_2 = \left(\frac{61}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{61}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$

dla $x < 3$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 25 - x + 3$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+25} = 28 - x \qquad |\cdot(\ )^2$$

$$25\left[(x-3)^2+25\right] = (28-x)^2$$

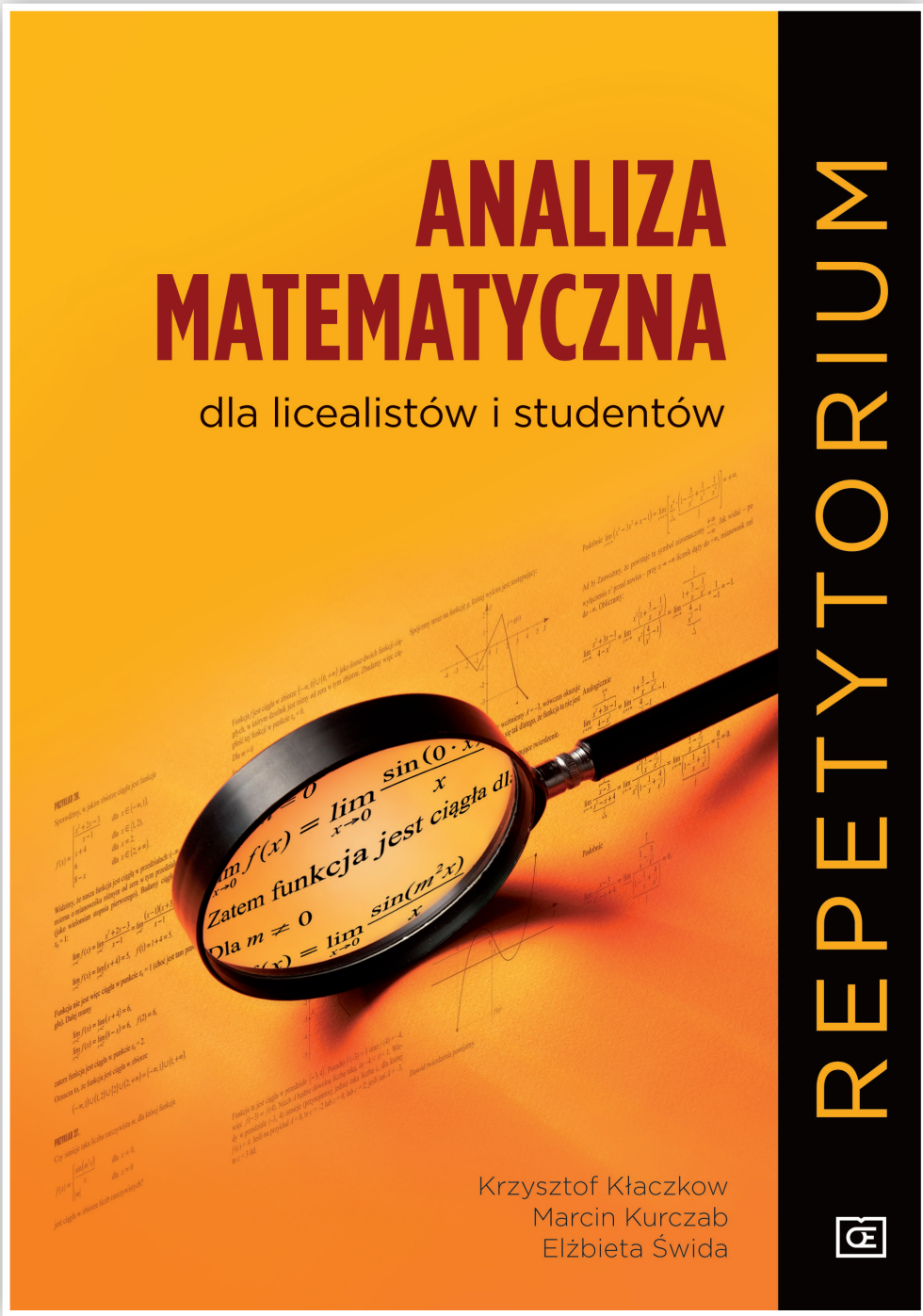
z powyższego równania mamy $x_3 = \frac{11}{12}$ oraz $x_4 = 3$.

Jednak dla $x = 3$ mamy $r = 0$, więc odrzucamy $x = 3$. Zatem $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$.

Obliczamy $r = \frac{|x-3|}{5} = \frac{\left|\frac{11}{12} - 3\right|}{5} = \frac{5}{12}$.

Mając środek $S_2 = \left(\frac{11}{12}; 0\right)$ oraz $r = \frac{5}{12}$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\left(x - \frac{11}{12}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{144}.$$



format 165 x 235 mm
stron 252

Spis treści

ROZDZIAŁ 1.

Granica i ciągłość funkcji 5

1.1. Granica funkcji w punkcie 5

Obliczanie granic funkcji w punkcie 20

1.2. Granica niewłaściwa, granica w nieskończoności, granice jednostronne 26

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie 26

Granica funkcji w nieskończoności 29

Granice jednostronne funkcji w punkcie 37

1.3. Asymptoty wykresu funkcji 46

Asymptoty pionowe 46

Asymptoty poziome 50

Asymptoty ukośne 54

1.4. Ciągłość funkcji 59

Ciągłość funkcji w punkcie 59

Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym 68

ROZDZIAŁ 2.

Pochodna funkcji 82

2.1. Pochodna funkcji w punkcie 82

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie 92

Własności pochodnej funkcji w punkcie 94

2.2. Pochodna funkcji w zbiorze 97

2.3. Funkcja pochodna 98

Podstawowe własności pochodnej funkcji 102

Pochodna funkcji złożonej 113

Pochodna funkcji odwrotnej 122

2.4. Zastosowania pochodnej funkcji 124

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji 124

Ekstrema lokalne funkcji 131

Ekstrema globalne 142
Ekstrema globalne w przedziale domkniętym 142
Ekstrema globalne w przedziale otwartym 145
Zadania optymalizacyjne 148
2.5. Dalsze zastosowania pochodnej 163
Reguła de L'Hóspitala 163
Pochodne wyższych rzędów 172
Druga pochodna a wypukłość funkcji 173
Druga pochodna a ekstremum lokalne funkcji 181
Badanie przebiegu zmienności funkcji 185

ROZDZIAŁ 3.

Całka nieoznaczona 200
3.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona 200
3.2. Podstawowe twierdzenia dotyczące całki nieoznaczonej 203
3.3. Podstawowe metody całkowania 206
Metoda całkowania przez części 206
Metoda całkowania przez podstawienie 209

ROZDZIAŁ 4.

Całka oznaczona 216
4.1. Definicja i własności całki oznaczonej 216
4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej 222
4.3. Inne zastosowania całki oznaczonej 228

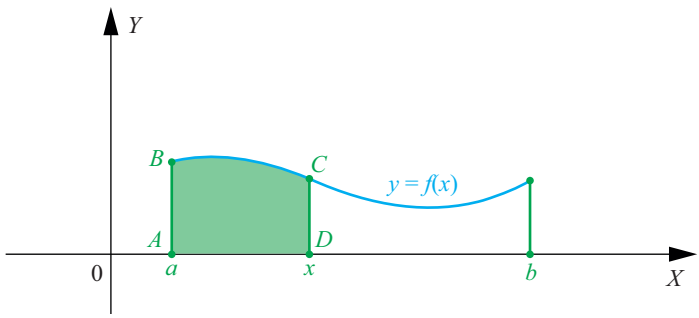
TESTY

Test 1. Granica i ciągłość funkcji 233
Test 2. Pochodna funkcji 238
Test 3. Całka nieoznaczona i całka oznaczona 244
Odpowiedzi do testu 1 250
Odpowiedzi do testu 2 250
Odpowiedzi do testu 3 251

4.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, które pozwoli nam na interpretację geometryczną całki oznaczonej.

Niech będzie dana funkcja f, określona w przedziale $\langle a, b\rangle$, ciągła i nieujemna w tym przedziale. Dla $x \in \langle a, b\rangle$ oznaczmy przez $P(x)$ pole figury $ADCB$ (nazywanej trapezem krzywoliniowym):



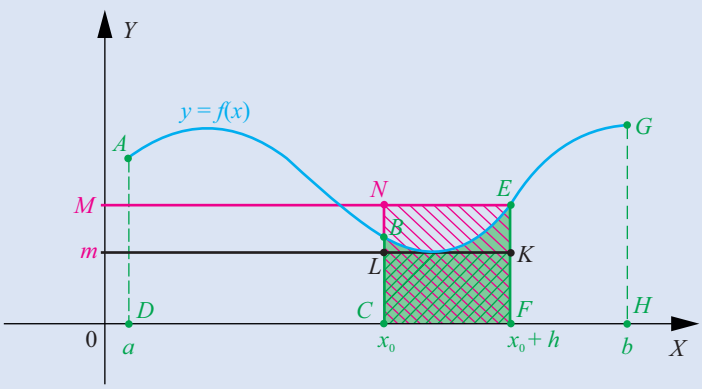
Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 3 . **(Newtona - Leibniza)**

Funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b\rangle$,

Dowód.

Weźmy najpierw dowolne $x_0 \in \langle a, b\rangle$, a następnie dowolną liczbę $h \neq 0$, dla której $x_0 + h \in (a, b)$.



Zauważmy, że liczba $\left|P(x_0 + h) - P(x_0)\right|$ wyraża pole S_{BCFE} figury $BCFE$. Jeżeli bowiem $h > 0$, to pole figury $BCFE$ wyraża różnica $P(x_0 + h) - P(x_0)$, jeśli zaś $h < 0$, to pole odpowiedniej figury wyraża różnica $P(x_0) - P(x_0 + h)$.

Tak więc liczby: h oraz $P(x_0+h)-P(x_0)$ są albo obie dodatnie, albo obie ujemne, zatem ich iloraz jest zawsze dodatni. Otrzymujemy stąd, wykorzystując twierdzenie o wartości bezwzględnej ilorazu, że:

$$(1)\qquad \frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{|h|}=\left|\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}\right|=\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}.$$

Oznaczmy teraz przez m i M odpowiednio: najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale domkniętym, którego końcami są x_0 oraz x_0+h (na mocy twierdzenia Weierstrassa mamy pewność, że funkcja osiąga te wartości w tym przedziale, gdyż jest w nim ciągła).

Zauważmy, że zachodzi następująca nierówność dla pól S_{CFKL}, S_{BCFE}, S_{CFEN} odpowiednio figur $CFKL$, $BCFE$ i $CFEN$:

$$S_{CFKL}\le S_{BCFE}\le S_{CFEN}.$$

Ale $S_{CFKL}=m\cdot|h|$ i $S_{CFEN}=M\cdot|h|$, zatem mamy:

$$m\cdot|h|\le|P(x_0+h)-P(x_0)|\le M\cdot|h|.$$

Dzieląc ostatnią nierówność stronami przez $|h|$, otrzymujemy:

$$m\le\frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{|h|}\le M.$$

Po uwzględnieniu równości (1) mamy:

$$m\le\frac{|P(x_0+h)-P(x_0)|}{h}\le M.$$

Natomiast na podstawie wniosku ze str. 81. $\left(\text{przy } A=\dfrac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}\right)$ otrzymujemy, że istnieje w przedziale domkniętym o końcach x_0 oraz x_0+h taki punkt c, dla którego

$$(2)\qquad f(c)=\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}.$$

Zauważmy, że jeżeli $h\to 0$, to $c\to x_0$ (ponieważ przedział o końcach x_0 oraz x_0+h staje się coraz krótszy, a więc c leży coraz bliżej x_0). Stąd, na mocy ciągłości funkcji f, wynika, że $f(c)\to f(x_0)$. Otrzymujemy zatem $\lim\limits_{h\to 0} f(c)=f(x_0)$.

Natomiast jeżeli $h\to 0$, to iloraz różnicowy $\dfrac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}$ dąży do $P'(x_0)$.

Wobec (2) otrzymujemy zatem, że

$$f(x_0) = \lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} = P'(x_0).$$

dla dowolnego $x_0 \in \langle a, b \rangle$, co oznacza, że funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Dowód twierdzenia został zakończony.

Wyciągnijmy jeszcze pewne wnioski z tego twierdzenia. Załóżmy, że F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale. Wtedy, na mocy twierdzenia 1. ze str. 201. musi być

$$P(x) = F(x) + C,$$

gdzie P jest funkcją, o której mówi ostatnie twierdzenie. Zauważmy, że możemy wyznaczyć stałą C, ponieważ musi być

$P(a) = 0$. Tak więc

$0 = P(a) = F(a) + C$, skąd $C = -F(a)$. Zatem

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

Zauważmy na koniec, że

$$P(b) = F(b) - F(a)$$

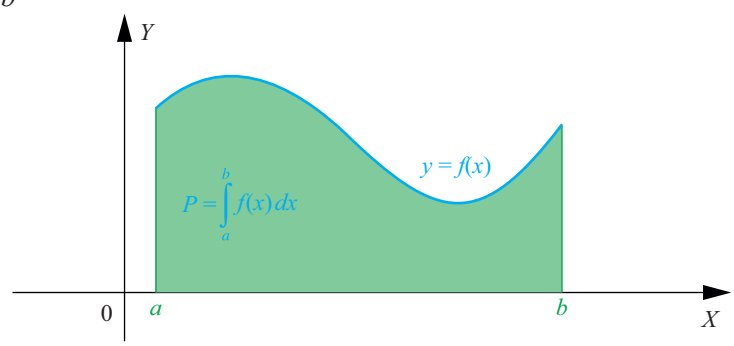
oraz że $P(b)$ wyraża pole trapezu krzywoliniowego $ADHG$ (rys. na str. 223.). Ale

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Otrzymujemy więc następujący wniosek.

WNIOSEK (interpretacja geometryczna całki oznaczonej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ i nieujemna w tym przedziale, to pole P obszaru ograniczonego osią OX, wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$



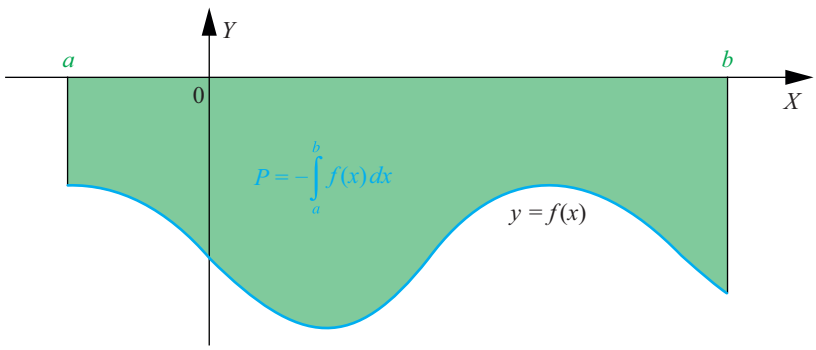
wyraża się wzorem:

(*) $$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Zauważmy, że obliczanie w ten sposób pól pewnych obszarów jest możliwe dla nas tylko w przypadku, gdy obszary te są ograniczone (choć w bardziej zawansowanej matematyce nie musi tak być).

Pole to jest wyrażone w jednostkach, które przyjmiemy w danych obliczeniach. Czasami po obliczeniu pola za pomocą tego wzoru wyraźnie to zaznaczymy, pisząc że np. $P = 8$ (jednostek pola). Tak więc całka daje nam wartość liczbową, a sami musimy określić jednostkę pola, według której mierzymy.

Zauważmy teraz, że jeżeli funkcja f byłaby niedodatnia i ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to pole P obszaru ograniczonego osią OX, wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$



wynosiłoby $P = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$

(**) $$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tak więc aby obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem pewnej funkcji, ciągłej w przedziale $\langle a, b\rangle$, musimy wiedzieć, czy funkcja jest nieujemna, czy też niedodatnia w tym przedziale. Jeśli zaś funkcja przyjmuje w przedziale $\langle a, b\rangle$, zarówno wartości nieujemne, jak i niedodatnie, to należy podzielić ten przedział na takie części, aby na każdej z nich funkcja podcałkowa była już zawsze albo nieujemna, albo niedodatnia.

Podobnego podziału przedziału całkowania należy dokonać, jeśli krzywa ograniczająca obszar nie jest w całym przedziale wykresem tej samej funkcji. Często też zachodzi konieczność obliczania pól obszarów ograniczonych od góry wykresem funkcji f, a od dołu funkcji g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$:

format 165 x 235 mm
stron 128

Spis treści

Wstęp 5

Typowe podstawienia 6

Symbole używane w zbiorze 7

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach 8

1.1. Równania wielomianowe 8

1.2. Równania wielomianowe z wartością bezwzględną 17

1.3. Równania pierwiastkowe 18

1.4. Równania wymierne 29

1.5. Równania wykładnicze 32

1.6. Równania logarytmiczne 36

1.7. Równania logarytmiczno-wykładnicze 39

1.8. Równania trygonometryczne 41

1.9. Równania logarytmiczno-trygonometryczne 53

1.10. Równania trygonometryczno-wykładnicze 56

Zadania do samodzielnego rozwiązania 58

2. Podstawienie zmiennej pomocniczej w nierównościach 61

2.1. Nierówności wielomianowe 61

2.2. Nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną 62

2.3. Nierówności wymierne z wartością bezwzględną 63

2.4. Nierówności pierwiastkowe 64

2.5. Nierówności wykładnicze 67

2.6. Nierówności logarytmiczne 67

2.7. Nierówności logarytmiczno-wykładnicze 69

2.8. Nierówności trygonometryczne 70

2.9. Nierówności trygonometryczno-wykładnicze 76

2.10. Nierówności trygonometryczno-logarytmiczne 78

Zadania do samodzielnego rozwiązania 80

3. Podstawienie zmiennej pomocniczej w układach równań 81

Zadania do samodzielnego rozwiązania 93

4. Podstawienie nowej zmiennej w równaniach z parametrem 94

Zadania do samodzielnego rozwiązania 109

5. Zadania różne 110

Zadania do samodzielnego rozwiązania 118

Odpowiedzi 119

Wstęp

W rozwiązywaniu równań, nierówności i układów równań potrzeba znajomości różnych metod, m.in. podstawienia zmiennej pomocniczej. Jest to zwykle wielkie ułatwienie w rozwiązaniu zadania, czasem wręcz jedyna skuteczna metoda. Jednak użycie nowej zmiennej często wymaga też wprowadzenia odpowiednich założeń lub dodatkowych warunków, w szczególności w zadaniach z parametrem i wartością bezwzględną. Proponuję bliżej się przyjrzeć tej metodzie i zobaczyć, w jak wielu różnych sytuacjach bywa skuteczna, a także jak ją poprawnie stosować.

W każdym rozdziale umieszczone są zadania o różnym stopniu trudności. Poszczególne szczeble zostały tak oznaczone:

I pierwszy stopień wtajemniczenia,

II drugi stopień wtajemniczenia,

III trzeci (najtrudniejszy) stopień wtajemniczenia.

Zbiór zawiera 105 zadań z pełnymi rozwiązaniami oraz 98 zadań do samodzielnego rozwiązania; te ostatnie umieszczone są na końcu poszczególnych rozdziałów. Aby móc się zmierzyć z zebranymi tu zadaniami, trzeba – naturalnie – mieć pewną elementarną wiedzę na temat równań, nierówności i układów równań.

Książka przyda się uczniom przygotowującym się do egzaminu maturalnego lub do startu w konkursach matematycznych.

Od wielu lat prowadzę dodatkowe zajęcia z matematyki i tego typu zadania często rozwiązuję z uczniami. Niniejszy zbiór napisałem na podstawie wieloletniego doświadczenia, jestem przekonany, że może się przydać nauczycielom w pracy na lekcjach czy kółkach.

Warto zauważyć, że metoda podstawiania jest jedną z ważniejszych metod przy obliczaniu całek i rozwiązywaniu równań różniczkowych. Opanowanie tej metody ułatwi więc także naukę na studiach wyższych.

Życzę udanej pracy z zadaniami
Tomasz Grębski

1 Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

Zajmiemy się podstawieniem zmiennej pomocniczej w równaniach różnego typu. Przedstawione przykłady pokażą, jak stosować podstawienie oraz jakie założenia pociąga za sobą wprowadzenie do równania nowej zmiennej. Ten rozdział jest w książce najbardziej rozbudowany, ponieważ to tutaj pojawia większość rodzajów podstawień, w innych rozdziałach już tylko je wykorzystujemy, czasem modyfikując.

1.1. Równania wielomianowe

I **Zadanie 1.1.**

Rozwiąż równanie: $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

$(x^2)^2 - 18x^2 + 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy zmienną pomocniczą, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 - 18t + 32 = 0$

$\Delta = 196, \sqrt{\Delta} = 14$

$(t = 2 \vee t = 16) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2 \vee t = 16$

A zatem

$(t = 2 \vee t = 16) \wedge x^2 = t$

$x^2 = 2 \vee x^2 = 16$	Wracamy do pierwotnej zmiennej.

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 4 \vee x = -4$

Odpowiedź: $x \in \{-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\}$.

I **Zadanie 1.2.**

Rozwiąż równanie: $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$.

Rozwiązanie typowe:

$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$

$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 + 14t - 32 = 0$

$\Delta = 324, \sqrt{\Delta} = 18$

$(t = -16 \vee t = 2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t = 2$

A więc
$t = 2 \wedge x^2 = t$

$x^2 = 2$	Wracamy do zmiennej x.

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Rozwiązanie alternatywne: Często się zdarza, że podczas podstawiania nowej zmiennej zapominamy o założeniach. Jednak w wielu przypadkach rozwiązanie można jeszcze „uratować". Przeanalizujmy ponownie poprzednie zadanie.

$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$

$(x^2)^2 + 14x^2 - 32 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$	Podstawiamy nową zmienną, zapominając o założeniu.

$t^2 + 14t - 32 = 0$

$\Delta = 324, \sqrt{\Delta} = 18$

$t = -16 \vee t = 2$

A zatem
$(t = -16 \vee t = 2) \wedge x^2 = t$

$x^2 = -16 \vee x^2 = 2$	Wracamy do pierwotnej zmiennej.

Tu właśnie możemy „uratować" nasze rozwiązanie. Wystarczy zauważyć, że pierwsze z tych równań nie ma rozwiązań, ponieważ kwadrat dowolnej liczby nie może być ujemny. A więc

$x \in \varnothing \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Odpowiedź: $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

I Zadanie 1.3.

Rozwiąż równanie: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

$(x^2)^2 + 5x^2 + 6 = 0$	Wyodrębniamy element x^2.
$x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.

$t^2 + 5t + 6 = 0$

$\Delta = 1, \sqrt{\Delta} = 1$

$(t = -3 \vee t = -2) \wedge t \geq 0 \Rightarrow t \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$	Wracamy do zmiennej x.

Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązań.

I Zadanie 1.4.

Rozwiąż równanie: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$	
$(x^3)^2 - 7x - 8 = 0$	Wyodrębniamy element x^3.
$x^3 = t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$	Podstawiamy nową zmienną, która tym razem jest dowolną liczbą rzeczywistą (można opuścić to założenie).
$t^2 - 7t - 8 = 0$	
$(t + 1)(t - 8) = 0$	
$(t = -1 \vee t = 8) \wedge t \in \boldsymbol{R}$	
A zatem	
$(t = -1 \vee t = 8) \wedge x^3 = t$	
$x^3 = -1 \vee x^3 = 8$	Wracamy do zmiennej x.
$x = -1 \vee x = 2$	

Odpowiedź: $x \in \{-1, 2\}$.

I Zadanie 1.5.

Rozwiąż równanie: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Rozwiązanie:

$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$	
$(x^4)^2 - 15x^4 - 16 = 0$	Wyodrębniamy element x^4.
$x^4 = t$, gdzie $t \geq 0$	Podstawiamy nową zmienną, dodając odpowiednie założenie.
$t^2 - 15t - 16 = 0$	
$(t + 1)(t - 16) = 0$	
$(t = -1 \vee t = 16) \wedge t \geq 0$	
Wobec tego	
$t = 16 \wedge x^4 = t$	
$x^4 = 16$	Wracamy do zmiennej x.
$x = 2 \vee x = -2$	

Odpowiedź: $x \in \{-2, 2\}$.

Wniosek: Jeśli podstawiamy zmienną pomocniczą za potęgę o wykładniku parzystym, to musimy pamiętać, że ta nowa zmienna jest nieujemna. Zapisując symbolicznie, otrzymujemy:
$x^{2n} = t, \ t \geq 0$.
Jeśli podstawiamy nową zmienną za potęgę x o wykładniku nieparzystym, to nowa zmienna może być dowolną liczbą rzeczywistą. Zapisując symbolicznie, otrzymujemy:
$x^{2n+1} = t, \ t \in \boldsymbol{R}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

I **1.1.** Rozwiąż równanie: $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

I **1.2.** Rozwiąż równanie: $2x^4 - x^2 - 1 = 0$.

I **1.3.** Rozwiąż równanie: $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

I **1.4.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$.

I **1.5.** Rozwiąż równanie: $16x^8 - 15x^4 - 1 = 0$.

II **1.6.** Rozwiąż równanie: $x^9 - 3x^6 - 6x^3 + 8 = 0$.

I **1.7.** Rozwiąż równanie: $-3(-x^4 + 3x^2 - 3) = 6 + (3x^2 - x^4 - 1)^2$.

II **1.8.** Rozwiąż równanie: $(x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 6x - 1) + 3 = 0$.

II **1.9.** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

III **1.10.** Rozwiąż równanie: $x^6 - 10x^5 + 47x^4 - 100x^3 + 47x^2 - 10x + 1 = 0$.

II **1.11.** Rozwiąż równanie: $2(x - 3)^2 - 1 = -|x - 3|$.

II **1.12.** Rozwiąż równanie: $(x + 5)^2 = 2 - |x + 5|$.

II **1.13.** Rozwiąż równanie: $|x + 1|^5 = |x + 1|$.

I **1.14.** Rozwiąż równanie: $x + 7\sqrt{x} = 18$.

II **1.15.** Rozwiąż równanie: $x - 2 - 3\sqrt{x + 6} = 0$.

II **1.16.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2} - 6 = 5\sqrt[3]{x}$.

II **1.17.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x^2 + 9 + 6x} - 12 = \sqrt[3]{x + 3}$.

III **1.18.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{(2 + x)^2} = 4\sqrt[3]{(2 - x)^2}$.

III **1.19.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[6]{x^2 - 25} = \sqrt[3]{x - 5}$.

II **1.20.** Rozwiąż równanie: $3\sqrt[4]{\frac{x - 1}{x + 1}} + 3\sqrt[4]{\frac{x + 1}{x - 1}} = 10$.

II **1.21.** Rozwiąż równanie: $\sqrt[5]{\frac{x^2 - 4}{x + 1}} - 3\sqrt[5]{\frac{x + 1}{x^2 - 4}} = -2$.

II **1.22.** Rozwiąż równanie: $5\sqrt[4]{x^2 - 4} = 6 - \sqrt{x^2 - 4}$.

II **1.23.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4$.

II **1.24.** Rozwiąż równanie: $x^2 + 3x - 4 = 5\sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

Odpowiedzi

1. Podstawienie zmiennej pomocniczej w równaniach

1.1. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.2. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.3. Podstawienie: $t = x^2$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

1.4. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, 2\sqrt[3]{2}\right\}$.

1.5. Podstawienie: $t = x^4$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$.

1.6. Podstawienie: $t = x^3$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$.

1.7. Podstawienie: $t = -x^4 + 3x^2 - 1$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź:

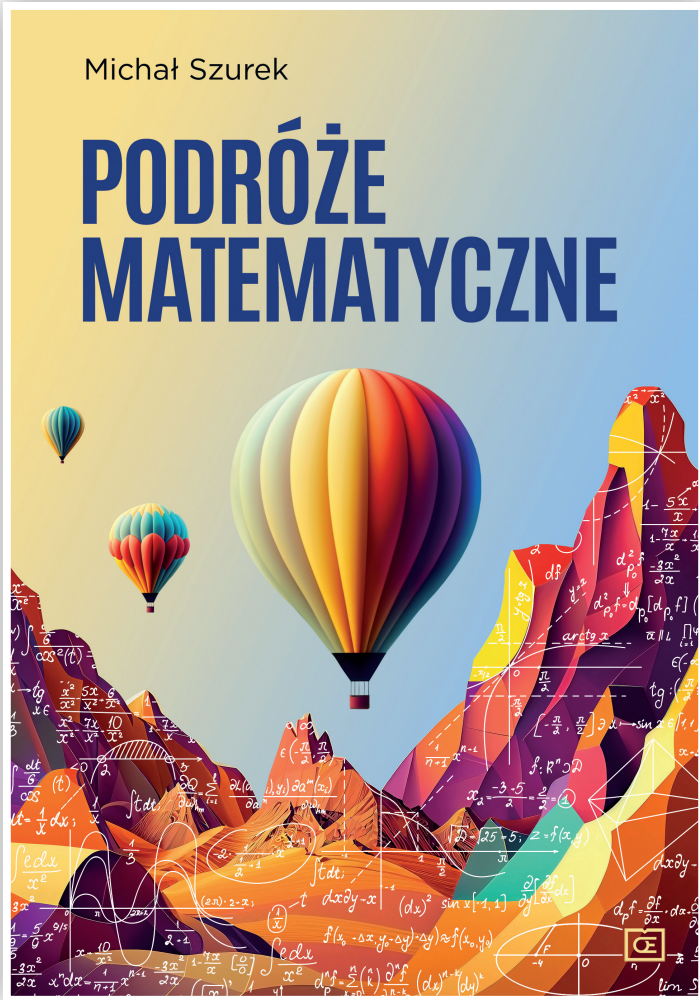
$$x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right\}.$$

1.8. Podstawienie: $t = x^2 + 3x$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \{-3, 0\}$.

1.9. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1.10. Podstawienie: $t = x + \frac{1}{x}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.
Odpowiedź: $x \in \left\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right\}$.

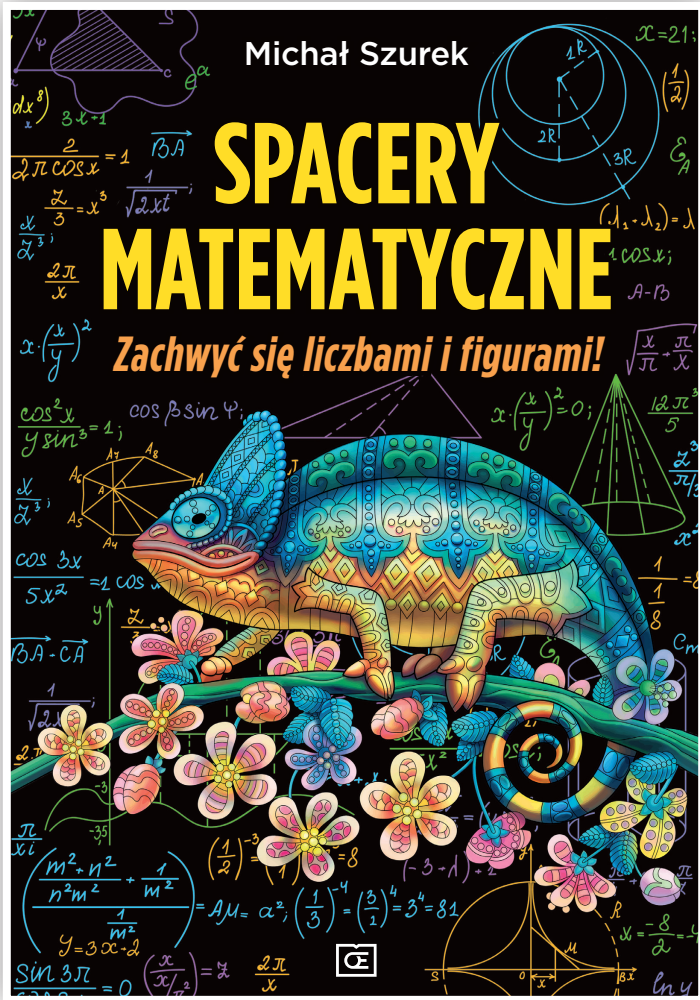
1.11. Podstawienie: $t = |x - 3|$, gdzie $t \geq 0$.
Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.



format 165 x 235 mm
stron 296

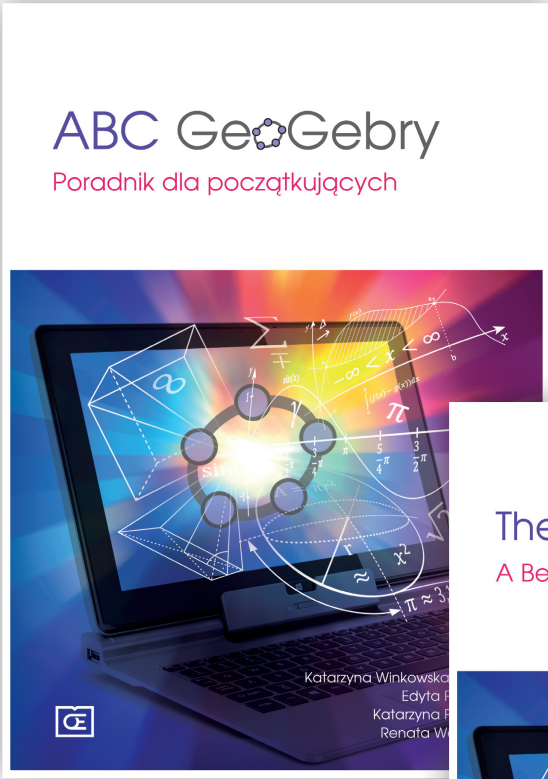
PODRÓŻE MATEMATYCZNE to książka nie tylko dla ucznia i nauczyciela, lecz dla wszystkich, którzy interesują się matematyką i reagują na jej wyzwania – i dla młodszych, i dla starszych.

Z nieprzebranego dorobku matematyki Autor wybrał kilkadziesiąt arcydzieł – zadań, twierdzeń, teorii – i w barwny sposób opowiada o nich z wielu punktów widzenia. A czyni to tak, by początkującego czytelnika zainteresować, a czytelnika dojrzałego – nie znudzić. Autor ukazuje matematykę przyjemną i intrygującą. Treść książki oscyluje wokół programu szkolnego, chociaż im wyższy numer rozdziału, tym „odległość" od szkoły większa, a w rozdziale 17 jest wręcz „kosmiczna". Książka i jej rozdziały są napisane zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Znajdziemy tu równania, tradycyjne zadania w nowym ujęciu, zadania logiczne, kolorową geometrię i wycieczkę w dziwne przestrzenie. Trudne miejsca nie powinny nikogo odstraszać.

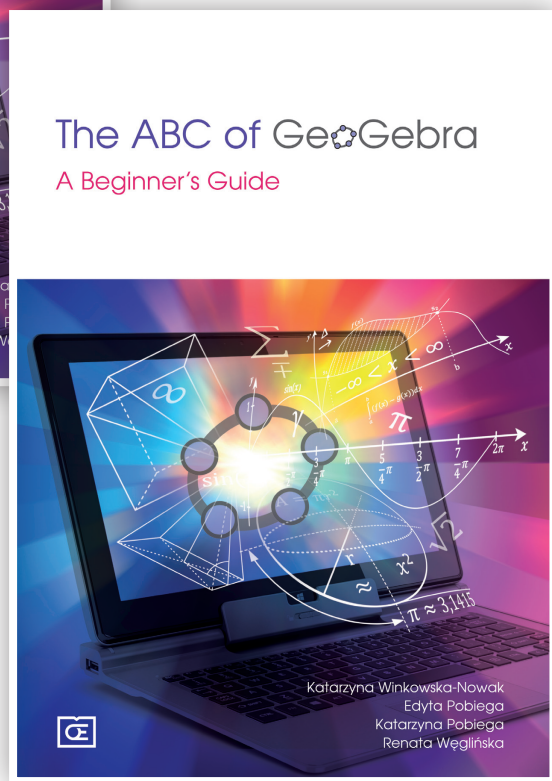


format 165 x 235 mm
stron 288

SPACERY MATEMATYCZNE to barwny przewodnik po matematyce, ukazujący ją z innej niż na lekcjach strony. Profesor Michał Szurek – erudyta i pasjonat – podczas 12 spacerów snuje opowieści, z niesłychaną lekkością, wokół wybranych zagadnień matematycznych, wplata ciekawostki i anegdoty, nawiązuje do innych dziedzin nauki. Wszystkie treści oscylują wokół szkolnego programu nauczania, czasem oddalając się od niego, by za chwilę znowu się przybliżyć. A cel jest jeden: zainteresować czytelnika matematyką, pomóc ją zrozumieć i się z nią zaprzyjaźnić. Dzięki tej książce uczeń zachwyci się matematyką wokół siebie, a nauczyciel będzie miał niewyczerpane źródło pomysłów na atrakcyjne lekcje.

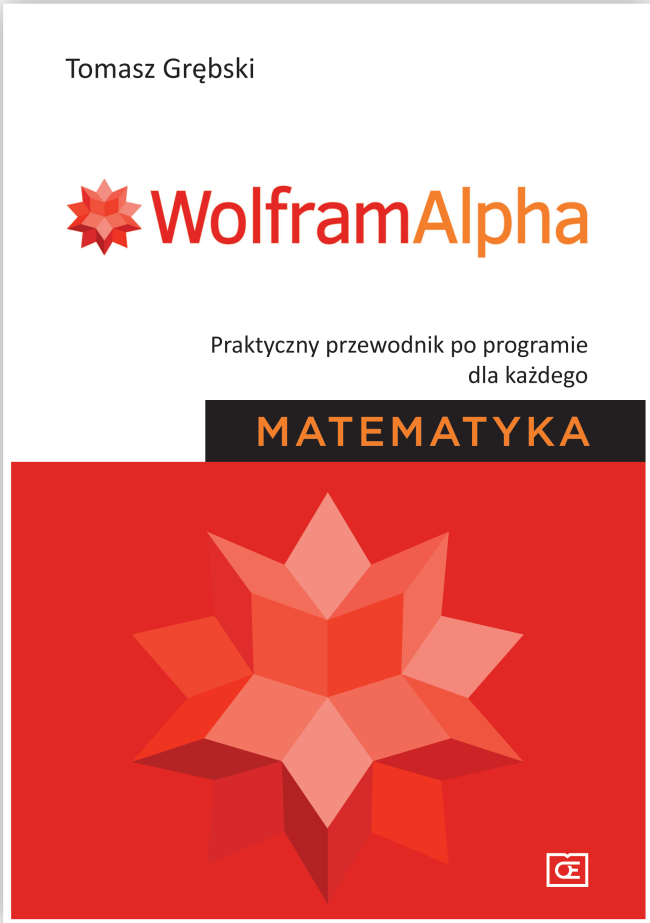


format 165 x 235 mm
stron 132



Ten poradnik jest przeznaczony dla początkujących adeptów i zainteresowanych GeoGebrą, jej możliwościami i przydatnością w nauczaniu i uczeniu się matematyki na wszystkich poziomach edukacji. GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem matematycznym, dostępnym on-line i off-line w systemach operacyjnych Windows, Linux i Mac OSX, na komputerach i na urządzeniach przenośnych (tablety, smartfony). Poradnik ten dotyczy stosowania GeoGebry przy użyciu komputerów z systemem operacyjnym Windows.

Poradnik dostępny również w języku angielskim.



format 165 x 235 mm
stron 216

Program ten swe korzenie ma w słynnym programie Mathematica, który doskonale łączy obliczenia numeryczne i symboliczne, interpretację graficzną wyników, język programowania, dokumentację i możliwość publikacji pracy. Dzięki bogactwu funkcji jest świetnym narzędziem pracy matematyków, fizyków, biologów, chemików i innych.

Program jest przeznaczony zarówno dla uczniów, studentów, jak i dla nauczycieli. Z własnego doświadczenia wiem, jak przyjemnie pracuje się z programem wspólnie z uczniami. Nauczyciel bez wątpienia staje się nowoczesny, a uczniów to zachęca do pracy. Krótko mówiąc – przyjemne z pożytecznym.

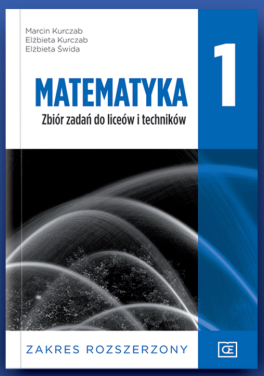
W tym Poradniku zajmujemy się stroną matematyczną programu. A zatem stawiamy sobie pytanie: w czym może pomóc nam Wolfram Alpha (jeśli chodzi o matematykę) oraz w jaki sposób z niego korzystać?

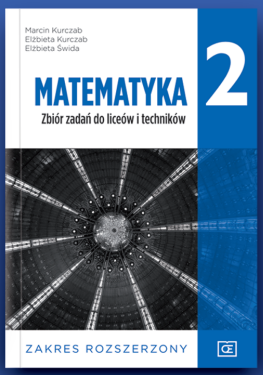
Wolfram Alpha m.in. rozwiązuje równania i nierówności, układy równań i nierówności, oblicza pochodne i całki, rysuje funkcje oraz wypisuje ich najważniejsze własności. To oczywiście przysłowiowa „kropla w morzu” jego możliwości.

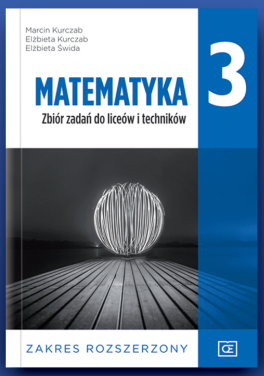
MATEMATYKA
w liceum i technikum

PODSTAWA PROGRAMOWA 2019

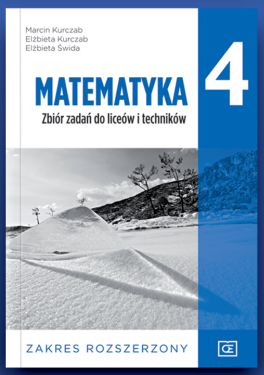
ZBIORY ZADAŃ







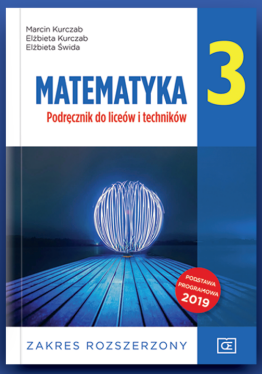
Solidnie od podstaw



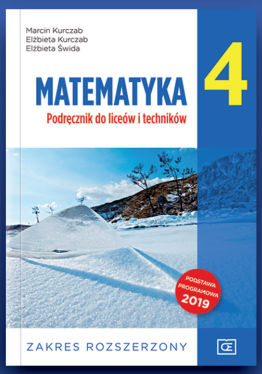
MATEMATYKA
w liceum i technikum

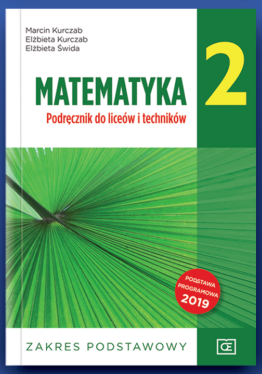
PODSTAWA PROGRAMOWA 2019

PODRĘCZNIKI



Solidnie od podstaw





Matura 2024
MATEMATYKA

Oferta dopasowana do każdego maturzysty

www.pazdro.com.pl

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO